Suites numériques (1)

Généralités, variation, suites arithmétiques – Première spécialité

1. Généralités sur les suites

1.1 Définition et notations

Définition 1.1: Suite numérique

Une **suite numérique** est une fonction u définie sur $\mathbb{N}$ (ou à partir d'un entier n_0) à valeurs réelles :

$$u : n \longmapsto u(n).$$

Pour tout entier n, le réel $u(n)$ est le **terme de rang** n (ou d'indice n) de la suite.

Notations. Le terme de rang n se note $u(n)$ ou, plus souvent, u_n. La suite elle-même se note $(u(n))$ ou (u_n), ou encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque

Il ne faut pas confondre :

- (u_n) : la suite tout entière, et u_n : un nombre, le terme de rang n ;
- u_{n+1} : le terme de rang $n+1$ (le « suivant »), et u_n+1 : le nombre u_n auquel on ajoute 1 ;
- u_{n-1} : le terme précédent (défini pour $n \geqslant 1$ si la suite commence au rang 0).

1.2 Modes de génération d'une suite

a) Définition explicite : $u_n = f(n)$

Le terme u_n est donné directement en fonction de n par une formule. On peut alors calculer n'importe quel terme sans connaître les précédents.

Exemple 1.2

Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 3n + 1$. Alors

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1 - 3 + 1 = -1, \quad u_2 = 4 - 6 + 1 = -1, \quad u_3 = 9 - 9 + 1 = 1, \quad u_4 = 5.$$

Le terme $u_{10} = 100 - 30 + 1 = 71$ se calcule directement.

b) Définition par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

On donne le premier terme et une relation qui permet de passer d'un terme au suivant. Pour calculer u_n, il faut calculer tous les termes précédents.

Exemple 1.3

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$. Alors

$$u_1 = 3 \times 2 - 1 = 5, \qquad u_2 = 3 \times 5 - 1 = 14, \qquad u_3 = 3 \times 14 - 1 = 41.$$

Une relation de récurrence peut aussi faire intervenir *deux* termes précédents. C'est le cas de la **suite de Fibonacci** : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, dont les premiers termes sont

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots$$

c) Définition par un algorithme

Un algorithme (programme Python, tableur, calculatrice) peut produire les termes d'une suite : voir la section 4. La **suite de Syracuse** en est un exemple célèbre : on part d'un entier $u_0 > 0$ et, pour tout n,

$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Pour $u_0 = 7$: $7,\ 22,\ 11,\ 34,\ 17,\ 52,\ 26,\ 13,\ 40,\ 20,\ 10,\ 5,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ 4,\ 2,\ 1, \ldots$

d) Définition par des motifs géométriques

Exemple 1.4: Allumettes

On construit une ligne de n carrés accolés avec des allumettes. Soit u_n le nombre d'allumettes nécessaires.

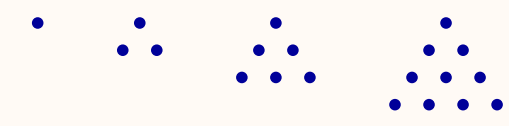


$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$

On a $u_1 = 4$, $u_2 = 7$, $u_3 = 10$: chaque carré supplémentaire demande 3 allumettes de plus. D'où la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 3$ et la formule explicite $u_n = 3n + 1$.

Exemple 1.5: Nombres triangulaires

Soit T_n le nombre de points d'un triangle de n lignes (la ligne k contient k points).

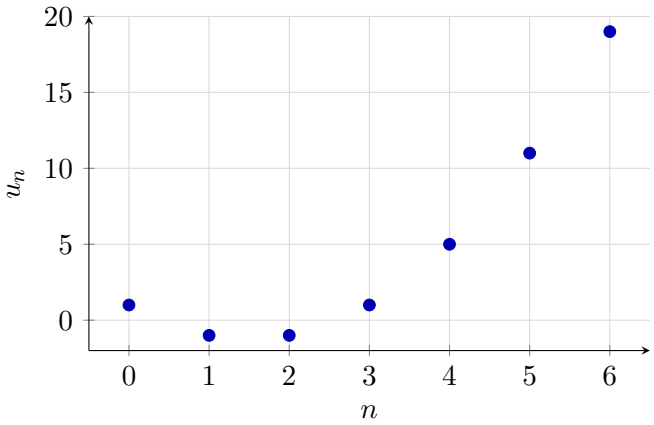


$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$ $n = 4$

On obtient $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$ et, en ajoutant la ligne $n + 1$ qui compte $n + 1$ points : $T_{n+1} = T_n + (n + 1)$. On montrera plus loin que $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1.3 Représentation graphique

La suite (u_n) se représente dans un repère par le nuage des points isolés $M_n(n\,;u_n)$. On ne relie *pas* les points : une suite n'est définie que pour des entiers.



Nuage de points de la suite $u_n = n^2 - 3n + 1$ pour $0 \leqslant n \leqslant 6$.

Remarque

Dans l'étude d'une suite, on passe constamment d'un registre à l'autre : *langue naturelle* (« chaque année, le loyer augmente de 12 € »), *registre algébrique* ($u_{n+1} = u_n + 12$, puis $u_n = 600 + 12n$) et *registre graphique* (points alignés). Savoir traduire d'un registre à l'autre fait partie des compétences attendues.

2. Sens de variation d'une suite

Définition 2.1: Sens de variation

Soit (u_n) une suite.

- (u_n) est **croissante** si, pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$; **strictement croissante** si $u_{n+1} > u_n$.
- (u_n) est **décroissante** si, pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$; **strictement décroissante** si $u_{n+1} < u_n$.
- (u_n) est **constante** si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n$.
- (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Remarque

Une suite n'est pas nécessairement monotone : par exemple $u_n = (-1)^n$ donne $1, -1, 1, -1, \ldots$ Une suite peut aussi être monotone seulement *à partir d'un certain rang.*

Méthode

Pour étudier le sens de variation de (u_n) :

1. **Signe de la différence** : on calcule $u_{n+1} - u_n$ et on étudie son signe.
2. **Comparaison à 1 du quotient** : si tous les termes sont strictement positifs, on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 ($\geqslant 1$: croissante ; $\leqslant 1$: décroissante).
3. **Cas d'une suite explicite** $u_n = f(n)$: si f est croissante (resp. décroissante) sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est croissante (resp. décroissante).

Remarque

La réciproque de la méthode 3 est fausse : la suite $u_n = n + \sin(2\pi n) = n$ est croissante, alors que la fonction $x \mapsto x + \sin(2\pi x)$ ne l'est pas sur $[0\,;+\infty[$.

Exemple 2.2

1. $u_n = n^2 - 3n + 1$. Pour tout n :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 3(n+1) + 1 - (n^2 - 3n + 1) = 2n - 2.$$

Cette différence est négative pour $n = 0$, nulle pour $n = 1$, positive pour $n \geqslant 2$. La suite n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$ (on a $u_0 > u_1$ puis $u_2 > u_1$...), mais elle est **croissante à partir du rang** 1.

2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n^2$. Alors $u_{n+1} - u_n = n^2 \geqslant 0$: la suite est croissante.
3. $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$. Tous les termes sont strictement positifs et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

Or $\dfrac{2(n+1)}{n+2} \geqslant 1 \iff 2n+2 \geqslant n+2 \iff n \geqslant 0$, vrai pour tout n : la suite est croissante.

3. Suites arithmétiques

3.1 Définition et terme général

Définition 3.1: Suite arithmétique

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r s'appelle la **raison** de la suite.

Autrement dit, on passe d'un terme au suivant *en ajoutant toujours le même nombre* : la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.

Exemple 3.2

La suite des entiers naturels impairs $1, 3, 5, 7, \ldots$ est arithmétique de raison 2. La suite $u_0 = 7$, $u_{n+1} = u_n - 3$ est arithmétique de raison -3. La suite des carrés $0, 1, 4, 9, \ldots$ n'est pas arithmétique : $1 - 0 = 1$ mais $4 - 1 = 3$.

Propriété 3.3: Terme général

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Pour tout entier n,

$$u_n = u_0 + nr.$$

Plus généralement, pour tous entiers n et p : $u_n = u_p + (n-p)\,r$.

Démonstration

Pour tout entier k, $u_{k+1} - u_k = r$. En additionnant ces égalités pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) = \underbrace{r + r + \cdots + r}_{n \text{ termes}} = nr.$$

Dans le membre de gauche, tous les termes se simplifient deux à deux sauf u_n et $-u_0$: on obtient $u_n - u_0 = nr$, soit $u_n = u_0 + nr$.
La formule générale s'obtient de la même façon en additionnant les égalités pour $k = p, \ldots, n-1$.

Exemple 3.4

Soit (u_n) arithmétique avec $u_0 = 7$ et $r = -3$: $u_n = 7 - 3n$ et $u_{20} = 7 - 60 = -53$.
Si (v_n) est arithmétique avec $v_3 = 11$ et $v_8 = 26$: $5r = v_8 - v_3 = 15$ donc $r = 3$ et $v_n = v_3 + 3(n-3) = 3n + 2$.

3.2 Lien avec les fonctions affines, sens de variation

Pour une suite arithmétique, $u_n = f(n)$ avec $f(x) = rx + u_0$: **une suite arithmétique est la restriction aux entiers d'une fonction affine**. Les points $M_n(n\,;u_n)$ sont alignés sur la droite d'équation $y = rx + u_0$, de pente r.

Propriété 3.5: Variation

Soit (u_n) arithmétique de raison r.

- si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante ;
- si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante ;
- si $r = 0$, (u_n) est constante.

En effet, $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout n.

3.3 Somme de termes consécutifs

Théorème 3.6: Somme des n premiers entiers

Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration

Notons $S = 1 + 2 + \cdots + n$. On écrit la somme dans les deux ordres :

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1.$$

En additionnant colonne par colonne, chaque somme vaut $n + 1$, et il y a n colonnes : $2S = n(n+1)$, d'où $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 3.7

$1 + 2 + \cdots + 100 = \dfrac{100 \times 101}{2} = 5050$. On retrouve aussi le nombre triangulaire $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ de l'exemple 1.5.

Propriété 3.8: Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit (u_n) arithmétique. Pour $p \leqslant n$, la somme $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ de ces $n - p + 1$ termes consécutifs vaut

$$(n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2} = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Démonstration

Notons $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ et écrivons S dans les deux ordres. Dans l'addition colonne par colonne, la somme des termes de la colonne k est $u_{p+k} + u_{n-k} = (u_p + kr) + (u_n - kr) = u_p + u_n$. Il y a $n - p + 1$ colonnes, donc $2S = (n - p + 1)(u_p + u_n)$.

Exemple 3.9

Soit $u_n = 3 + 2n$. Calculons $S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{20}$. Il y a 16 termes, $u_5 = 13$ et $u_{20} = 43$ donc

$$S = 16 \times \frac{13 + 43}{2} = 16 \times 28 = 448.$$

3.4 Modélisation : évolutions à accroissements constants

Une grandeur qui augmente (ou diminue) chaque période *d'une même quantité* est modélisée par une suite arithmétique ; sa croissance est dite **linéaire**.

Exemple 3.10

Un loyer de 600 € augmente de 12 € par an. Le loyer u_n après n années vérifie $u_{n+1} = u_n + 12$ et $u_0 = 600$. Donc $u_n = 600 + 12n$, et au bout de 10 ans le loyer est de 720 €. Il en va de même pour un capital placé à *intérêts simples*, qui augmente chaque année d'une somme fixe.

4. Algorithmes

4.1 Calcul d'un terme

Pour une suite définie par récurrence, on utilise une boucle `for` : on remplace u par son suivant, n fois. Voici le calcul de u_n pour $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

```
def terme(n):
    u = 2
    for k in range(n):
        u = 3*u - 1
    return u

print(terme(3)) # affiche 41
```

4.2 Calcul d'une somme de termes

On ajoute chaque terme à une variable `S` initialisée à 0. Par exemple $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ pour $u_n = 3 + 2n$:

```
def somme(n):
    S = 0
    for k in range(n+1):
        S = S + (3 + 2*k)
    return S
```

4.3 Calcul de factorielle

Pour $n \geqslant 1$, on note $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ et $0! = 1$; la suite $(n!)$ vérifie $0! = 1$ et $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

```
def factorielle(n):
    f = 1
    for k in range(1, n+1):
        f = f * k
    return f

print(factorielle(5)) # affiche 120
```

4.4 Liste des premiers termes : Fibonacci et Syracuse

```
def fibonacci(n):
    a, b = 0, 1
    liste = []
    for k in range(n):
        liste.append(a)
        a, b = b, a + b
    return liste

def syracuse(u0):
    u = u0
    liste = [u]
    while u != 1:
        if u % 2 == 0:
            u = u // 2
        else:
            u = 3*u + 1
        liste.append(u)
    return liste

print(fibonacci(10)) # [0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34]
print(syracuse(7)) # [7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1]
```

Remarque

La boucle `while` de `syracuse` s'arrête quand on atteint 1. On conjecture que c'est toujours le cas, quel que soit l'entier de départ, mais personne ne sait le démontrer : c'est la *conjecture de Syracuse*.

Récapitulatif

Suite arithmétique de raison r	
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$
Terme général	$u_n = u_0 + nr$ et plus généralement $u_n = u_p + (n-p)r$
Modèle	accroissements constants (croissance linéaire)
Lien	restriction aux entiers de la fonction affine $x \mapsto rx + u_0$
Variation	strictement croissante si $r > 0$, strictement décroissante si $r < 0$, constante si $r = 0$
Somme	$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $u_p + \cdots + u_n = (\text{nombre de termes}) \times \dfrac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$