

Chapitre 1 : Équations et fonctions polynômes du second degré

1 Définition

Une fonction polynôme du second degré est une fonction de la forme

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

où a , b et c désignent des nombres réels, avec $a \neq 0$.

Si $a = 0$, on a une fonction affine de coefficient directeur b et d'ordonnée à l'origine c

Elle est définie pour tout réel x , on note : $\text{Def } f = \mathbb{R}$ (l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$)

Exemple 1.1.

$$g(x) = x^2 - 2.$$

On a ici

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -2.$$

2 Les différentes formes

Forme développée

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Forme canonique

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \quad \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = f(\alpha).$$

Le point S de coordonnées $(\alpha; \beta)$ sera alors le sommet de la parabole (courbe représentative de la fonction f (voir paragraphe 3)).

Exemple 2.1.

$$g(x) = -(x + 3)^2 - 2.$$

On a ici

$$a = -1, \alpha = -3 \text{ et } \beta = -2.$$

Forme factorisée (elle n'existe pas toujours si on impose à ses coefficients d'être dans $\mathbb{R}$)

Si x_1 et x_2 sont les racines réelles de la fonction f , la forme factorisée de f est donnée par :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Si $x_1 = x_2$, alors on a :

$$f(x) = a(x - x_1)^2 = a(x - x_2)^2.$$

On parle alors de racine **double**.

Exemple 2.2.

$$g(x) = 3(x - 1)(x + 2).$$

On a ici

$$a = 3$$

et les deux racines 1 et -2

Exemple 2.3.

$$h(x) = 3(x + 1)(x + 1) = 3(x + 1)^2.$$

On a ici $a = 3$ et la racine double -1

Exemple 2.4.

$$i(x) = x^2 + 1.$$

n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}[X]$ (notation pour l'ensemble des polynômes à coefficients réels).

3 Parabole

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré f où

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

est une **parabole**.

Son sommet est le point

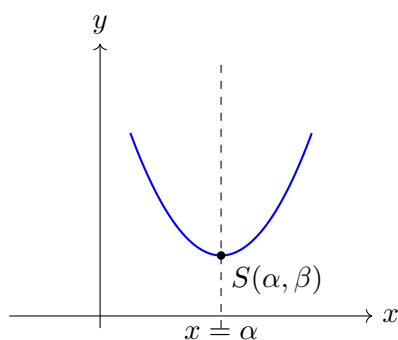
$$S(\alpha; \beta),$$

où

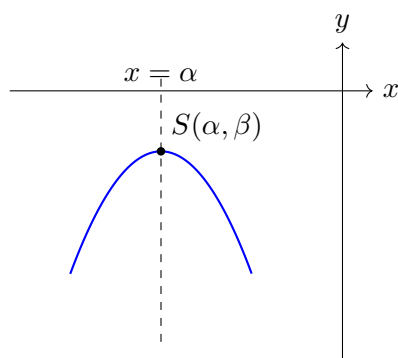
$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

Son axe de symétrie est la droite d'équation $x = \alpha$.

Son équation cartésienne est $y = ax^2 + bx + c$ ou, si on a la forme canonique, $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$



$a > 0$: la parabole est tournée vers le haut.



$a < 0$: la parabole est tournée vers le bas.

Exemple 3.1. On considère la fonction

$$g(x) = x^2 + x + 1.$$

donnée par sa forme développée

— **Coordonnées du sommet :**

On a $a = 1$ et $b = 1$, donc :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}.$$

Le sommet est donc

$$S\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right).$$

— *Équation de l'axe de symétrie :*

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}}.$$

— *Forme canonique :*

$$g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

— *Équation cartésienne de la parabole :*

La parabole représentant la fonction g est d'équation

$$\boxed{y = x^2 + x + 1}.$$

En utilisant la forme canonique, on peut également écrire

$$\boxed{y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

4 Variations

Comme on peut le présager en observant la courbe représentative on a :

- Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut : la fonction est **décroissante** sur $] -\infty ; \alpha]$, puis **croissante** sur $] \alpha, +\infty[$.
- Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas : la fonction est **croissante** sur $] -\infty ; \alpha]$, puis **décroissante** sur $] \alpha, +\infty[$.

La démonstration se fait à partir de la forme canonique.

Exemple 1

Soit

$$g(x) = (x - 1)^2 + 2.$$

Le sommet est le point $S(1; 2)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

La fonction g est décroissante sur $] -\infty ; 1]$ puis croissante sur $[1; +\infty[$.

Exemple 2

Soit

$$h(x) = -2x^2 + 8.$$

Le sommet est le point $S(0; 8)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	8	$-\infty$

La fonction h est croissante sur $] -\infty; 0]$ puis décroissante sur $[0; +\infty[$.

5 Équation du second degré

On veut résoudre l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

où $a \neq 0$

5.1 Calcul du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Le signe du discriminant permet de connaître le nombre de solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $\Delta = 0$ (l'axe (Ox) est tangent à la parabole en $S(x_0, f(x_0))$), il y a exactement une solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

- Si $\Delta > 0$ (l'axe (Ox) coupe la parabole en deux points d'abscisses x_1 et x_2), il y a exactement deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution réelle : la parabole est soit au-dessus de l'axe (Ox) (cas où $a > 0$), soit en dessous de l'axe des abscisses (cas où $a < 0$).

5.2 Démonstration

Considérons le trinôme

$$ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

On commence par factoriser le trinôme par a :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right).$$

Vu qu'on utilise l'identité remarquable

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

on peut transformer l'expression $x^2 + Ax$ "par canonisation" en écrivant :

$$\begin{aligned} x^2 + Ax &= x^2 + 2x \left(\frac{A}{2} \right) = x^2 + 2x \left(\frac{A}{2} \right) + \left(\frac{A}{2} \right)^2 - \left(\frac{A}{2} \right)^2 \\ &= \left(x + \frac{A}{2} \right)^2 - \frac{A^2}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, dans notre situation $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ devient

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + 2x \times \frac{b}{2a} + \frac{c}{a} \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}, \end{aligned}$$

où

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

On obtient donc la forme canonique :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

On peut maintenant résoudre facilement l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

en procédant par équivalences :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\ &\quad (\text{car } a \neq 0). \end{aligned}$$

Il suffit alors d'étudier le signe de Δ :

- Si $\Delta < 0$, le membre de droite est négatif : il n'y a aucune solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, on obtient une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta > 0$, on prend la racine carrée des deux membres :

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a},$$

d'où les deux solutions

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

6 Factorisation

Si $\Delta > 0$:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Si $\Delta = 0$:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

Si $\Delta < 0$, pas de factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

7 Somme et produit des racines

Propriété. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des racines réelles x_1 et x_2 , alors

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ces égalités sont appelées **relations de Viète**.

Démonstration lorsque $\Delta > 0$

Les deux racines sont

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Calculons leur somme :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Calculons maintenant leur produit :

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Cas particulier : $\Delta = 0$

L'équation possède une unique racine réelle

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

On obtient alors

$$x_1 + x_2 = 2 \times \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a},$$

et

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}.$$

Or, lorsque $\Delta = 0$,

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \implies \quad b^2 = 4ac.$$

Ainsi,

$$x_1 x_2 = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Les relations de Viète sont donc également vraies lorsque les deux racines sont confondues.

Réciproque

On cherche à résoudre le problème suivant.

Problème. *On donne S et P deux nombres.*

() Peut-on trouver deux nombres réels dont la somme vaut S et le produit P ?*

Pour répondre à cette question, on peut considérer le polynôme unitaire

$$f(x) = x^2 - Sx + P.$$

En effet, les racines de ce polynôme, si elles existent, vérifient

$$x_1 + x_2 = -\frac{-S}{1} = S \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{P}{1} = P.$$

Il suffit donc d'étudier le discriminant

$\Delta = (-S)^2 - 4 \times 1 \times P$ de $f(x)$ pour répondre au problème (*).

Propriété. *Soient S et P deux réels.*

— *Si $S^2 - 4P \geq 0$, alors le problème (*) admet une solution.*

Les deux nombres cherchés sont les racines du polynôme

$$x^2 - Sx + P.$$

Si le polynôme possède une racine double r (cas où $S^2 = 4P$), la solution du problème est le couple (r, r) .

— *Si $S^2 - 4P < 0$, alors le problème (*) n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.*

Exemple 7.1. *Trouver deux nombres réels dont la somme vaut 5 et le produit 6.*

1^{ère} méthode : on devine la réponse 2 et 3.

2^{ème} méthode :

On considère le polynôme

$$x^2 - 5x + 6.$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0.$$

Le polynôme admet donc deux racines réelles :

$$x = \frac{5 \pm 1}{2},$$

c'est-à-dire

$$2 \quad \text{et} \quad 3.$$

Les deux nombres cherchés sont donc 2 et 3

Exemple 7.2. Trouver deux nombres réels dont la somme vaut -4 et le produit 4 .
On considère le polynôme

$$x^2 + 4x + 4.$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 4 = 16 - 16 = 0.$$

Le polynôme admet une unique racine :

$$x = \frac{-4}{2} = -2.$$

Les deux nombres cherchés sont donc -2 et -2 .

On peut vérifier que

$$-2 + (-2) = -4 \quad \text{et} \quad (-2) \times (-2) = 4.$$

Exemple 7.3. Trouver deux nombres réels dont la somme vaut 2 et le produit 5 .
On considère le polynôme

$$x^2 - 2x + 5.$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16 < 0.$$

Le polynôme n'admet donc aucune racine réelle.

Il n'existe donc pas deux nombres réels dont la somme vaut 2 et le produit vaut 5 .

8 Étude du signe

Propriété. Le signe d'un trinôme du second degré dépend du signe de son coefficient dominant a .

- Si le trinôme possède deux racines réelles distinctes, alors il est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe opposé entre les deux racines.
- Si le trinôme possède une racine double, alors il est toujours du signe de a et s'annule uniquement en cette racine.
- Si le trinôme ne possède aucune racine réelle, alors il est toujours du signe de a .

Cette propriété est souvent résumée par la phrase suivante :

Le signe d'un trinôme est celui de a , sauf entre ses racines.

Exemple 8.1. Cas de deux racines réelles distinctes
Considérons le trinôme

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 4 = 2(x - 1)(x - 2).$$

Les racines sont 1 et 2 . Comme $a = 2$ est positif, le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Exemple 8.2. *Cas d'une racine double**Considérons le trinôme*

$$g(x) = -3x^2 + 12x - 12 = -3(x - 2)^2.$$

*La seule racine est 2, et elle est double.**Comme $a = -3$ est négatif, le trinôme est toujours négatif ou nul.*

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$-$

Exemple 8.3. *Cas d'aucune racine réelle**Considérons le trinôme*

$$h(x) = -\frac{x^2}{2} - 2 = -\frac{1}{2}x^2 - 2.$$

On a

$$\Delta = 0 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-2) = -4 < 0.$$

*Le trinôme ne possède donc aucune racine réelle.**Comme $a = -\frac{1}{2}$ est négatif, $h < 0$ sur $\mathbb{R}$.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) < 0.$$

À retenir

1. Un trinôme possède trois écritures : développée, canonique et factorisée.
2. Le signe du discriminant donne le nombre de solutions de l'équation du second degré.
3. La forme canonique permet de lire le sommet de la parabole et d'avoir les variations.
4. La forme factorisée permet de résoudre les équations ou inéquations du 2nd degré et d'étudier le signe du trinôme.
5. Les relations de Viète donnent la somme et le produit des racines.

Notion	Formule	Ce que l'on obtient immédiatement
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$	Le signe de Δ permet de connaître le nombre de racines réelles et de savoir si le trinôme est factorisable dans $\mathbb{R}[X]$.
Forme développée	$f(x) = ax^2 + bx + c$	On lit directement les coefficients a , b et c .
Forme canonique	$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$	On lit directement le coefficient a et les coordonnées du sommet $S(\alpha; \beta)$.
Forme factorisée	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	On lit directement le coefficient a ainsi que les racines x_1 et x_2 .
Relations de Viète	$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$	On obtient directement la somme et le produit des racines.

FRANCISCI VIETÆ
VARIORVM DE
 REBUS MATHEMATICIS
 RESPONSORVM, LIBER VIII.

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \times \dots$$



Apud IACOBVM AVERIVM, Typographum.
 1 5 9 3.

François Viète
 (1540–1603)

Mathématicien français, François Viète est considéré comme l'un des fondateurs de l'algèbre moderne. On lui doit notamment les célèbres relations reliant la somme et le produit des racines d'un polynôme à ses coefficients, aujourd'hui appelées *relations de Viète*.

Ce document a été réalisé avec l'aide de l'IA ChatGPT. Malgré le soin apporté à sa rédaction, ce document peut encore contenir quelques erreurs. N'hésitez pas à me faire part de vos remarques en m'écrivant à bruno.redon@profredon.fr.

M. Bruno REDON
 Professeur agrégé de mathématiques