Dérivation (1) : nombre dérivé et tangente

Première spécialité mathématiques

Contents

1 Taux de variation et sécantes **1**

2 Nombre dérivé **2**

3 Tangente à une courbe **3**

4 Approximation affine **3**

5 Interprétations en contexte **4**

6 Algorithmique : pentes des sécantes **4**

Dans tout ce chapitre, f désigne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel de I.

1 Taux de variation et sécantes

Définition

Soit $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$. Le **taux de variation** de f entre a et $a+h$ est le nombre

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Remarque

Si $b = a+h$, on retrouve l'écriture $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On le note aussi $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$: c'est le rapport de l'accroissement de y à l'accroissement de x.

Interprétation géométrique. Soient $A\big(a\,;f(a)\big)$ et $M\big(a+h\,;f(a+h)\big)$ deux points de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$. La droite (AM) est une **sécante** à $\mathcal{C}_f$, et son coefficient directeur (sa **pente**) est exactement le taux de variation $\tau(h)$.

Interprétation en cinématique. Si $x = f(t)$ est la position d'un mobile à l'instant t, le taux de variation entre t_0 et t_0+h est la **vitesse moyenne** sur cet intervalle de temps.

Exemple

Soit $f(x) = x^2$ et $a = 1$. Pour $h \neq 0$,

$$\tau(h) = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h.$$

Pour $h = 1{,}5$ (sécante passant par $A(1\,;1)$ et $M(2{,}5\,;6{,}25)$), la pente vaut 3,5.

2 Nombre dérivé

Dans l'exemple précédent, $\tau(h) = 2 + h$: lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, le taux de variation se rapproche de 2. On dit que $\tau(h)$ *tend vers* 2 quand h tend vers 0, et on note $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = 2$.

Définition (nombre dérivé)

On dit que f est **dérivable en** a si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche d'un réel fixe ℓ lorsque h se rapproche de 0. Ce réel est appelé **nombre dérivé** de f en a et noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Remarque

La notion de limite est ici abordée de façon intuitive, à partir de représentations graphiques et de calculs numériques ; aucune définition formelle n'est exigée en première.

Exemple

Pour $f(x) = x^2$, $f'(1) = 2$ (calcul ci-dessus).
Pour $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = 2$: pour $h \neq 0$ et $h \neq -2$,

$$\tau(h) = \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h} = \frac{-h}{2(2+h)\,h} = -\frac{1}{2(2+h)}.$$

Quand h tend vers 0, $\tau(h)$ se rapproche de $-\dfrac{1}{4}$, donc $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$.

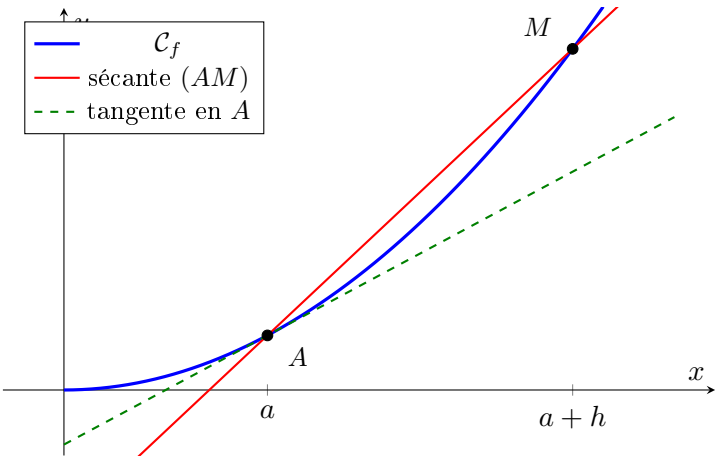


Figure 1: Quand M se rapproche de A (c'est-à-dire quand $h \to 0$), la sécante (AM) se rapproche de la tangente en A.

3 Tangente à une courbe

Définition (tangente)

Si f est dérivable en a, la **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $A\big(a\,;f(a)\big)$ est la droite passant par A et de pente $f'(a)$. C'est la « position limite » des sécantes (AM) lorsque M se rapproche de A.

Propriété (équation de la tangente)

Si f est dérivable en a, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a)}$$

Démonstration

Cette tangente a pour coefficient directeur $f'(a)$, donc une équation de la forme $y = f'(a)\,x+p$. Elle passe par $A\big(a\,;f(a)\big)$, donc $f(a) = f'(a)\,a + p$, soit $p = f(a) - a\,f'(a)$. Ainsi

$$y = f'(a)\,x + f(a) - a\,f'(a) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Méthode : déterminer l'équation d'une tangente

1. Calculer $f(a)$.
2. Calculer $f'(a)$.
3. Remplacer dans $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ puis simplifier.

Exemple

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = 2$. On a $f(2) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$. La tangente en $A\left(2\,;\dfrac{1}{2}\right)$ a pour équation

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) = -\frac{1}{4}x + 1.$$

Remarque

Lecture graphique. Le nombre dérivé $f'(a)$ est la pente de la tangente : on le lit en se déplaçant d'une unité vers la droite sur la tangente et en lisant la variation verticale correspondante. Réciproquement, connaissant $f(a)$ et $f'(a)$, on construit la tangente en A en traçant la droite passant par A et de pente $f'(a)$.

4 Approximation affine

Près du point de tangence, la courbe est très proche de sa tangente. La fonction affine $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelée **fonction affine tangente** à f en a.

Propriété (approximation linéaire)

Si f est dérivable en a, alors pour h proche de 0,

$$\boxed{f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\,h}$$

Démonstration

Pour $h \neq 0$ petit, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \approx f'(a)$. En multipliant par h : $f(a+h)-f(a) \approx f'(a)\,h$.

Exemple

Avec $f(x)=\sqrt{x}$, $a=1$, $f(1)=1$ et $f'(1)=\dfrac{1}{2}$ (voir le chapitre suivant) :

$$\sqrt{1{,}02} \approx 1+\frac{1}{2}\times 0{,}02 = 1{,}01 \qquad \text{(valeur exacte } \approx 1{,}00995\text{)}.$$

Avec $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $a=1$, $f'(1)=-1$: $\dfrac{1}{1{,}03} \approx 1-0{,}03 = 0{,}97$ (valeur exacte $\approx 0{,}9709$).

5 Interprétations en contexte

- **Géométrie** : $f'(a)$ est la pente de la tangente en A.
- **Cinématique** : si $x=f(t)$ est la position à l'instant t, $f'(t_0)$ est la **vitesse instantanée** à l'instant t_0.
- **Économie** : si $C(q)$ est le coût de production de q unités, $C'(q_0)$ approche le **coût marginal**, c'est-à-dire le coût de production d'une unité supplémentaire : $C(q_0+1)-C(q_0) \approx C'(q_0)$.

Remarque

[Notations différentielles] En physique, on note $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ un taux de variation et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ une dérivée. Si $y=f(x)$, on écrit $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$, en adaptant les lettres au contexte : $x=f(t)$, $q=f(t)$, etc.

6 Algorithmique : pentes des sécantes

Écrire la liste des coefficients directeurs des sécantes pour un pas donné.

Pour une fonction f, un réel a et un pas $p>0$, on calcule les taux de variation $\dfrac{f(a+kp)-f(a)}{kp}$ pour $k=1,2,\ldots,n$.

```
def pentes_secantes(f, a, pas, n):
    """Liste des coefficients directeurs des secantes
    passant par (a, f(a)) et (a + k*pas, f(a + k*pas)), k = 1..n"""
    liste = []
    for k in range(1, n + 1):
        h = k * pas
        liste.append((f(a + h) - f(a)) / h)
    return liste

def f(x):
    return x ** 2

print(pentes_secantes(f, 1, 0.1, 5))
```

On pourra aussi faire décroître h (par exemple $h=10^{-1},10^{-2},10^{-3},\ldots$) pour observer que les pentes se stabilisent autour de $f'(a)$.

À retenir

- **Taux de variation** : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ = pente de la sécante.
- **Nombre dérivé** : $f'(a)$ = limite du taux de variation quand $h \to 0$ = pente de la tangente.
- **Tangente en** a : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.
- **Approximation affine** : $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ pour h proche de 0.
- **Interprétations** : pente d'une tangente, vitesse instantanée, coût marginal.

Remarque

[Pour la culture : histoire des mathématiques] Le calcul différentiel s'est imposé par sa capacité à résoudre simplement des problèmes variés (cinématique, mécanique, géométrie, optimisation). Leibniz et Newton développent un « calcul des variations » fondé sur l'idée que les phénomènes naturels évoluent de façon linéaire lorsqu'on leur applique de petites variations, à partir de la notion intuitive mais floue d'infiniment petit. Ce n'est que progressivement, au XIX^{e} siècle, que les notions de limite et de différentielle ont été clarifiées et ont donné l'exposé actuel.