Dérivation (1) : nombre dérivé et tangente

Fiche d'exercices

Exercice 1 (taux de variation et sécantes)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x$ et A le point de sa courbe d'abscisse 2.

1. Calculer $f(2)$.
2. Calculer le taux de variation de f entre 2 et 3, puis entre 2 et 2,5, puis entre 2 et 2,1. Que représentent ces nombres pour la courbe de f ?
3. Montrer que, pour tout réel $h \neq 0$, le taux de variation de f entre 2 et $2+h$ est égal à $1+h$.
4. Vers quel nombre se rapproche ce taux de variation lorsque h se rapproche de 0 ? En déduire $f'(2)$.

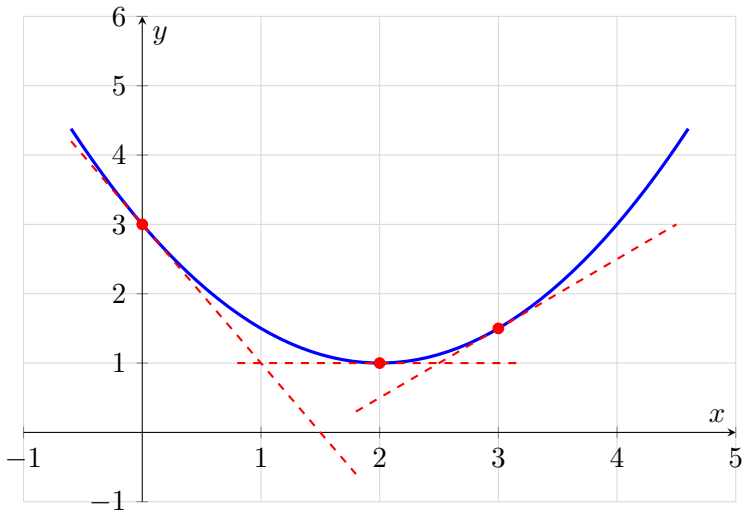
Exercice 2 (calculer un nombre dérivé)

Dans chaque cas, exprimer le taux de variation de f entre a et $a+h$ (pour $h \neq 0$) sous une forme simplifiée, puis en déduire le nombre dérivé $f'(a)$.

1. $f(x) = 2x^2 + x$ et $a = -1$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = -3$.
3. $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 4$.
   Indication : multiplier le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée $\sqrt{4+h}+2$.

Exercice 3 (lecture graphique)

On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f et trois de ses tangentes (en pointillés), aux points d'abscisses 0, 2 et 3.



1. Lire graphiquement $f(0)$, $f(2)$ et $f(3)$.
2. Lire graphiquement $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.
3. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

4. On admet que $f(4) = 3$ et $f'(4) = 2$. Construire sur le graphique la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4 et donner son équation.

Exercice 4 (équation d'une tangente)

Soit $f(x) = x^2 - 4x$.

1. Calculer le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$ et en déduire $f'(1)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. Même question au point d'abscisse 2. Que remarque-t-on sur cette tangente ? Que cela signifie-t-il graphiquement ?
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Exercice 5 (approximation affine)

1. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. On admet que $f'(1) = \dfrac{1}{2}$. En utilisant l'approximation $f(1 + h) \approx f(1) + f'(1)\,h$, donner une valeur approchée de $\sqrt{1{,}04}$ et de $\sqrt{0{,}98}$.
2. Soit $g(x) = \dfrac{1}{x}$. On admet que $g'(1) = -1$. Donner une valeur approchée de $\dfrac{1}{1{,}02}$ et de $\dfrac{1}{0{,}99}$.
3. Soit $k(x) = x^2$. On admet que $k'(3) = 6$. Donner une valeur approchée de $3{,}01^2$ et de $2{,}98^2$.
4. À la calculatrice, comparer chaque valeur approchée à la valeur exacte (ou à l'affichage de la calculatrice). Calculer l'erreur commise dans chaque cas.
5. Pour $k(x) = x^2$, montrer que l'erreur commise en approchant $(a + h)^2$ par $a^2 + 2ah$ est exactement h^2. Pourquoi l'approximation est-elle d'autant meilleure que h est petit ?

Exercice 6 (vitesse instantanée)

Un objet lâché sans vitesse initiale a parcouru la distance $d(t) = 4{,}9\,t^2$ (en mètres) au bout de t secondes de chute.

1. Calculer la vitesse moyenne de l'objet entre $t = 1$ et $t = 3$.
2. Montrer que la vitesse moyenne entre $t = 2$ et $t = 2 + h$ (avec $h > 0$) est égale à $19{,}6 + 4{,}9\,h$.
3. En déduire la vitesse instantanée à $t = 2$ s, en m/s puis en km/h.
4. Déterminer de la même façon la vitesse instantanée à $t = 3$ s.

Exercice 7 (coût marginal)

Une entreprise fabrique des objets. Le coût total de fabrication de q objets est $C(q) = q^2 + 10q + 100$, en euros.

1. Calculer $C(20)$ et $C(21)$. Quel est le coût de fabrication du 21^{e} objet ?
2. Calculer le taux de variation de C entre 20 et $20 + h$; en déduire $C'(20)$.
3. Le nombre $C'(20)$ approche le coût marginal en $q = 20$. Comparer-le avec le résultat de la question 1 et commenter.

Exercice 8 (algorithmique)

On considère le programme Python suivant, incomplet.

```
def taux(f, a, h):
    return ..............

def f(x):
    return x ** 3

for k in range(1, 5):
    h = 10 ** (-k)
    print(h, taux(f, 2, h))
```

1. Compléter la fonction `taux` pour qu'elle renvoie le taux de variation de f entre a et $a+h$.
2. Montrer que, pour $h \neq 0$, le taux de variation de $x \mapsto x^3$ entre 2 et $2+h$ est $12+6h+h^2$.
3. En déduire les valeurs affichées pour $k=1$ et $k=2$.
4. Quelle conjecture peut-on faire sur $f'(2)$? En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.
5. Modifier le programme pour qu'il affiche aussi, à chaque étape, l'écart entre le taux de variation et 12.

Exercice 9 (vrai ou faux ?)

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier (par une démonstration ou un contre-exemple).

1. Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est le coefficient directeur de la sécante à $\mathcal{C}_f$ passant par les points d'abscisses a et $a+h$.
2. Si $f'(a)=0$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est horizontale.
3. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)\,x + f(a)$.
4. Si $f'(3) = -2$, alors $f(3{,}01) \approx f(3) - 0{,}02$.
5. Le nombre dérivé $f'(a)$ est toujours positif.

Exercice 10 (pour aller plus loin)

Soit $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

1. Montrer que, pour tout réel a, $f'(a) = 2a - 2$.
2. Déterminer le point de la courbe en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 4x + 1$. Donner l'équation de cette tangente.
3. Montrer que la tangente au point d'abscisse a a pour ordonnée à l'origine $3 - a^2$.
4. En déduire qu'il existe deux tangentes à la courbe passant par l'origine O du repère, et donner leurs équations.