Suites numériques (1)

Exercices – généralités, variation, suites arithmétiques

Les exercices sont classés par difficulté croissante : ⋆ application directe, ⋆⋆ exercice d'entraînement, ⋆⋆⋆ exercice plus délicat.

Exercice 1 ⋆

Calculer les cinq premiers termes (de u_0 à u_4) des suites suivantes, puis le terme demandé.

a) $u_n = 2n^2 - 5n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; calculer aussi u_{10}.

b) $v_n = n^3 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 ⋆

Calculer les quatre premiers termes de chacune des suites suivantes.

a) $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 4$.

b) $w_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n^2 - 1$.

c) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (calculer jusqu'à a_5).

Exercice 3 ⋆

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 1$. Exprimer en fonction de n et simplifier :

$$u_{n+1}, \qquad u_{n-1} \ (n \geqslant 1), \qquad u_n + 1, \qquad 2u_n, \qquad u_{2n}, \qquad u_{n+1} - u_n.$$

Exercice 4 ⋆

Une salle de sport propose l'abonnement suivant : 30 € de frais d'inscription, puis 25 € par mois. On note u_n le coût total (en euros) au bout de n mois, avec $u_0 = 30$.

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. De quelle nature est la suite (u_n) ?

c) Exprimer u_n en fonction de n.

d) Au bout de combien de mois le coût total dépasse-t-il 400 € ?

e) Une salle concurrente demande 35 € par mois, sans frais d'inscription. Notons $v_n = 35n$ le coût total chez ce concurrent. À partir de quel nombre de mois l'abonnement de la première salle est-il *strictement* plus avantageux ?

Exercice 5 ⋆

Parmi les suites suivantes, lesquelles sont arithmétiques ? Lorsque c'est le cas, donner la raison et le premier terme u_0.

a) $u_n = 4n - 7$.

b) $v_n = n^2 - n$.

c) $w_n = \dfrac{n+3}{2}$.

d) $t_0 = 1$ et $t_{n+1} = t_n + n$.

Exercice 6 ⋆⋆

Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes, définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) $u_n = 5 - 2n$.

b) $v_n = n^2 + n$.

c) $w_n = n^2 - 7n$ (on pourra calculer $w_{n+1} - w_n$ et étudier son signe ; préciser à partir de quel rang la suite est croissante).

Exercice 7 ⋆⋆

Étudier le sens de variation des suites suivantes.

a) $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - n^2 - 1$.

b) $w_0 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2n - 5$. Calculer les premiers termes, puis préciser à partir de quel rang la suite est croissante.

Exercice 8 ⋆⋆

a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{n}{2^n}$. Justifier que tous ses termes sont strictement positifs, calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire le sens de variation de (u_n).

b) Même question pour $v_n = \dfrac{3^n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 ⋆⋆

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -4$ et de raison 3.

a) Exprimer u_n en fonction de n. Calculer u_{20}.

b) À partir de quel rang a-t-on $u_n \geqslant 100$?

c) Soit (v_n) une suite arithmétique telle que $v_7 = 12$ et $v_{15} = -4$. Déterminer sa raison, son premier terme v_0, puis v_n en fonction de n.

d) Quel est le rang du terme de (v_n) égal à 2 ? Le nombre -10 est-il un terme de la suite (v_n) ?

Exercice 10 ⋆⋆

Calculer les sommes suivantes.

a) $S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50$.

b) $S_2 = 11 + 12 + 13 + \cdots + 60$.

c) $S_3 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 59$ (somme des 30 premiers entiers impairs).

d) $S_4 =$ la somme de tous les multiples de 7 compris entre 100 et 300.

Exercice 11 ⋆⋆

Un employé est embauché avec un salaire annuel de 24 000 €. Son contrat prévoit une augmentation de 600 € chaque année. On note u_n son salaire annuel (en euros) pendant l'année numéro n, l'année d'embauche correspondant à $n = 0$.

a) Justifier que (u_n) est arithmétique et exprimer u_n en fonction de n.

b) Quel est son salaire annuel pendant la dixième année (année $n = 9$) ?

c) Quelle somme totale a-t-il perçue pendant ses dix premières années ?

d) À partir de quelle année son salaire annuel dépasse-t-il *strictement* 30 000 € ?

Exercice 12 ⋆⋆

Dans une salle de spectacle, la première rangée compte 20 sièges et chaque rangée suivante compte 2 sièges de plus que la précédente. La salle a 25 rangées. On note u_n le nombre de sièges de la rangée numéro n (avec $1 \leqslant n \leqslant 25$).

a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Exprimer u_n en fonction de n.

b) Combien de sièges compte la dernière rangée ?

c) Quelle est la capacité totale de la salle ?

Exercice 13 ⋆⋆

On considère le programme Python suivant.

```
S = 0
u = 2
for k in range(6):
    S = S + u
    u = u + 5
```

a) Recopier et compléter le tableau des valeurs des variables à la fin de chaque passage dans la boucle.

Valeur de `k`	(début)	0	1	2	3	4	5
Valeur de `S`	0						
Valeur de `u`	2						

b) On note (u_n) la suite dont les termes successifs sont les valeurs prises par `u`. Quelle est sa nature ? Exprimer u_n en fonction de n.

c) À quelle somme de termes de la suite (u_n) la valeur finale de `S` correspond-elle ? Retrouver cette valeur par le calcul.

Exercice 14 ⋆⋆

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = u_n + 7$. On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 1000$.

a) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie cet entier.

```
def seuil():
    n = 0
    u = 100
    while ..... :
        u = .....
        n = .....
    return n
```

b) Retrouver le résultat par le calcul, en exprimant u_n en fonction de n et en résolvant une inéquation.

c) Que faudrait-il modifier pour que la fonction renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > 5000$?

Exercice 15 ⋆⋆

a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

b) En déduire la valeur de $1 + 3 + 5 + \cdots + 99$.

c) Pour $n \geqslant 1$, on note $T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ le n-ième nombre triangulaire. Montrer que $T_{n-1} + T_n = n^2$ pour tout $n \geqslant 2$, et interpréter ce résultat géométriquement avec un schéma (un carré de $n \times n$ points découpé en deux triangles).

Exercice 16 ⋆⋆⋆

On place n points distincts ($n \geqslant 1$) sur un cercle et on trace tous les segments joignant deux de ces points. On note u_n le nombre de segments obtenus.

a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 (faire un schéma).

b) Lorsqu'on ajoute un $(n+1)$-ième point, combien de nouveaux segments obtient-on ? En déduire une relation entre u_{n+1} et u_n.

c) En déduire que $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$ (on pourra écrire u_n comme une somme).

d) Combien de poignées de main échangent 20 personnes qui se saluent toutes une fois ?

Exercice 17 ⋆⋆⋆

Trois nombres $a < b < c$ sont « en progression arithmétique », c'est-à-dire que ce sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. On sait que leur somme vaut 21 et que leur produit vaut 231.

a) En notant r la raison et b le terme central, exprimer a et c en fonction de b et r.

b) Déterminer b à l'aide de la somme, puis r à l'aide du produit.

c) En déduire les trois nombres.

Exercice 18 ⋆⋆⋆

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. Que remarque-t-on ? Formuler une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n.

b) Exprimer v_n en fonction de n. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.

c) Pour $n \geqslant 1$, justifier que $u_n - u_0 = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

d) Calculer cette somme à l'aide du cours, et en déduire l'expression de u_n en fonction de n. La conjecture de la question a) est-elle confirmée ?