

Exercice 1

A et B sont deux événements d'une même expérience aléatoire tels que :

$$P(A) = 0,3, \quad P(A \cup B) = 0,7, \quad P(A \cap B) = 0,2.$$

1. Calculer $P(B)$.
2. On suppose maintenant que

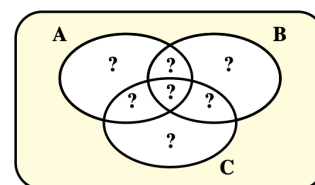
$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,3, \quad P(A \cup B) = 0,6.$$

Calculer $P(A \cap B)$.

Exercice 2 – Diagramme de Venn

Trois revues scientifiques A , B et C sont mises à la disposition des élèves d'un lycée. On sait que :

- 52 % ont lu A , 43 % ont lu B et 37 % ont lu C ;
- 22 % ont lu A et B , 15 % ont lu A et C et 13 % ont lu B et C ;
- 8 % ont lu les trois revues.



On interroge un élève au hasard.

1. Compléter le diagramme de Venn.
2. Quelle est la probabilité :
 - (a) que l'élève ait lu seulement une revue ?
 - (b) que l'élève n'ait lu aucune revue ?

Exercice 3 – Tableau à double entrée

Sur les 485 candidats au baccalauréat général d'un lycée, on sait que :

- 370 ont été reçus, dont 212 filles ;
- 40 garçons n'ont pas été reçus.

On appelle :

F : « le candidat est une fille », G : « le candidat est un garçon » et R : « le candidat est reçu ».

1. Compléter le tableau suivant :

	F	G	Total
R			
$\bar{R}$			
Total			485

2. On rencontre par hasard un candidat. Quelle est la probabilité que ce candidat soit :
 - (a) un garçon reçu ?
 - (b) une fille non reçue ?
 - (c) non reçu ?
3. On rencontre par hasard un garçon candidat. Quelle est la probabilité qu'il soit reçu ?
4. On rencontre au hasard un élève non reçu. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

Exercice 4 – Marche aléatoire

$ABCD$ est un tétraèdre régulier. Un scarabée se déplace sur les arêtes de ce tétraèdre, et uniquement sur les arêtes.

Son déplacement obéit aux règles suivantes :

- le temps de parcours d'une arête est d'une minute ;
- à un sommet, il choisit au hasard l'une des trois arêtes ;
- le scarabée part du sommet A .

Calculer les probabilités des événements suivants :

1. A : « le scarabée repasse en A au bout de trois minutes » ;
2. B : « le scarabée ne passe pas par le sommet C pendant les trois premières minutes ».

Exercice 5 – Prendre toutes les initiatives

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules rouges, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément au hasard trois boules dans l'urne. Quelle est la probabilité des événements suivants :
 - A : « le tirage ne contient aucune boule blanche » ;
 - B : « le tirage contient une boule blanche exactement » ;
 - C : « le tirage contient au moins deux boules blanches ».
2. On tire maintenant successivement trois boules **avec remise**. Déterminer les probabilités des événements A , B et C définis précédemment.
3. A-t-on

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \quad ?$$

Justifier.

Exercice 6 – Partage équitable

Deux joueurs Albert et Bernard jouent à un jeu en 3 manches gagnantes, donc jusqu'à 5 manches possibles. Ils misent chacun 32 pistoles. Le premier qui totalisera trois manches gagnantes reçoit les 64 pistoles jouées.

La première manche est gagnée par Albert. On doit s'arrêter là pour des raisons indépendantes de leur volonté.

Comment répartir les 64 pistoles mises ?

On pourra construire un arbre pour connaître la probabilité qu'Albert aurait eue de gagner si la partie avait pu continuer.

Exercice 7 – Dé pipé et probabilité conditionnelle

Un lot de cent dés contient vingt dés pipés. Pour un tel dé, la probabilité d'apparition du 6 est égale à $\frac{1}{2}$. Les autres dés sont parfaits.

1. On prend un dé au hasard et on le lance. Calculer la probabilité de l'événement S : « on obtient 6 ».
2. On prend un dé au hasard, on le lance et on obtient 6. Calculer la probabilité que le dé soit pipé.

Exercice 8 – Probabilités totales

Deux ateliers A et B fabriquent des puces électroniques.

Pour une commande de 2000 pièces, l'atelier A en a produit 60 % et l'atelier B en a produit 40 %.

L'atelier A produit 4 % de puces défectueuses et l'atelier B en produit 3 %.

On prend une puce au hasard dans la commande. On appelle :

A : « la puce provient de l'atelier A », B : « la puce vient de B » et D : « la puce est défectueuse ».

1. Compléter le tableau suivant :

	D	$\overline{D}$	Total
A			
B			
Total			2000

2. Déterminer : $P(B)$, $P(D)$, $P(A \cap D)$ et $P(B \cap D)$.
3. Calculer : $P_D(A)$ et $P_D(B)$.
4. Représenter la situation par un arbre pondéré.

Exercice 9 – Arbre pondéré

À la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :

- 65 % de la population concernée est contre la construction de ce barrage et, parmi ces opposants, 70 % sont des écologistes ;
- parmi les personnes non opposées à la construction, 20 % sont des écologistes.

On interroge une personne au hasard.

1. Écrire les probabilités correspondant aux données puis construire un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage et écologiste.
3. Calculer la probabilité qu'une personne interrogée ne soit pas opposée au barrage et soit écologiste.
4. En déduire la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.

Exercice 10 – Contrôle qualité

Une usine fabrique des tubes.

Une étude menée sur la production a permis de constater que :

- 96 % des tubes ont une épaisseur conforme ;
- parmi les tubes qui ont une épaisseur conforme, 95 % ont une longueur conforme ;
- 3,6 % des tubes ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme.

On choisit un tube au hasard dans la production et on considère les événements :

E : « l'épaisseur du tube est conforme » et L : « la longueur du tube est conforme ».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.
2. Montrer que

$$P(L) = 0,948.$$

Exercice 11 – Calculs abstraits

On considère deux événements A et B .

1. On sait que

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(\overline{B}) = \frac{3}{4}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{10}.$$

Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

2. On sait maintenant que

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{2}{3}.$$

Calculer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

3. On sait que

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P_A(B) = \frac{1}{4}, \quad P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{2}.$$

Calculer $P(B)$.

Exercice 12 – Prendre toutes les initiatives

Le quart de la population d'un pays a été vacciné. Parmi les personnes vaccinées, $\frac{1}{12}$ sont malades. Parmi les personnes malades, $\frac{1}{5}$ n'est pas vaccinée.

1. Calculer :

- (a) la probabilité qu'une personne malade soit vaccinée ;
- (b) la probabilité qu'une personne soit vaccinée et malade ;
- (c) la probabilité qu'une personne soit malade.

2. En déduire la probabilité qu'une personne non vaccinée tombe malade.

3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 13 – Indépendance et tableau

Dans une classe de 30 élèves, 18 sont des filles. Parmi les filles, 12 pratiquent une activité sportive. Parmi les garçons, 6 pratiquent une activité sportive.

On choisit un élève au hasard.

On note :

F : « l'élève est une fille » et S : « l'élève pratique une activité sportive ».

- 1. Construire un tableau à double entrée donnant les effectifs.
- 2. Calculer $P(F)$ et $P(S)$.
- 3. Calculer $P_F(S)$.
- 4. Les événements F et S sont-ils indépendants ? Justifier.
- 5. Calculer $P_S(F)$.

Exercice 14 – Tirages sans remise

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules bleues. On tire successivement deux boules sans remise.

On note :

R_1 : « la première boule est rouge » et R_2 : « la deuxième boule est rouge ».

1. Calculer $P(R_1)$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Calculer $P_{R_1}(R_2)$ et $P_{\bar{R}_1}(R_2)$.
4. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.
5. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une boule rouge.

Exercice 15 – Tirages avec remise

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules bleues. On tire successivement deux boules avec remise.

On note : R_1 : « obtenir une boule rouge au premier tirage » et R_2 : « obtenir une boule rouge au deuxième tirage ».

1. Calculer $P_{R_1}(R_2)$ et $P(R_2)$.
2. Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ? Justifier.
3. Calculer $P(R_1)$.
4. Calculer $P(R_1 \cap R_2)$ de deux manières différentes.

Exercice 16 – Indépendance

On considère deux événements A et B tels que :

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,5, \quad P(A \cap B) = 0,2.$$

1. Calculer $P(A)P(B)$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.
3. Calculer $P_A(B)$.

Exercice 17 – Test médical

Dans une population, 5 % des personnes sont atteintes d'une maladie. Un test permet de détecter cette maladie.

- Lorsqu'une personne est malade, le test est positif dans 96 % des cas.
- Lorsqu'une personne n'est pas malade, le test est positif dans 4 % des cas.

On choisit une personne au hasard. On note :

M : « la personne est malade » et T : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré.
2. Calculer $P(M \cap T)$, $P(\bar{M} \cap T)$ puis en déduire $P(T)$.
3. Calculer $P_M(T)$.
4. Le résultat du test étant positif, quelle est la probabilité que la personne soit réellement malade ?
5. Comment interpréter le résultat obtenu ?

Exercice 18 – Synthèse : première et activité sportive

Dans un lycée, 40 % des élèves sont en première.

Parmi les élèves de première, 70 % pratiquent une activité sportive.

Parmi les élèves qui ne sont pas en première, 50 % pratiquent une activité sportive.

On choisit un élève au hasard.

On note :

R : « l'élève est en première » et S : « l'élève pratique une activité sportive ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(S)$.
3. Les événements R et S sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 19 – Synthèse : probabilités conditionnelles et indépendance

On considère deux événements A et B tels que :

$$P(A) = 0,6, \quad P(B) = 0,5, \quad P_A(B) = 0,4.$$

1. Calculer $P(A \cap B)$ puis $P(A \cap \overline{B})$.
2. En déduire $P_A(\overline{B})$.
3. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.
4. Construire un tableau de probabilités complété par les probabilités marginales.
5. Construire les deux arbres de probabilités.

Exercice 20 – Indépendance et probabilités conditionnelles

Soient A et B deux événements d'un univers probabilisé Ω , tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

On suppose que

$$P_B(A) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P_A(B) = \frac{3}{4}.$$

1. Trouver une relation entre $P(A)$ et $P(B)$.
2. On pose $P(A) = x$.

Exprimer en fonction de x :

$$P(B), \quad P(A \cap B), \quad P(A \cap \overline{B}), \quad P(\overline{A} \cap B).$$

3. Déterminer, si possible, la ou les valeurs possibles de x pour que A et B soient indépendants.
4. Calculer

$$P_{\overline{B}}(A) \quad \text{et} \quad P_{\overline{A}}(B).$$



Thomas Bayes
1702–1761



Daniel Bernoulli
1700–1782



Andreï Kolmogorov
1903–1987