

Chapitre 2 : Probabilités conditionnelles et indépendance

1 Probabilité conditionnelle

1.1 Introduction

On dispose d'un jeu de **32 cartes** et on tire une carte au hasard.

On considère les deux événements :

- A : « la carte tirée est un cœur » ;
- B : « la carte tirée est rouge ».

Première situation

Sans aucune information supplémentaire, quelle est la probabilité que la carte tirée soit un cœur ?

Dans un jeu de 32 cartes, il y a 8 cartes de cœur. Ainsi : $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Deuxième situation

Supposons maintenant qu'une personne nous donne l'information suivante :

« Je sais que la carte tirée est rouge. »

Cette information réduit le nombre de cartes possibles : parmi les 32 cartes du jeu, il ne reste plus que les **16 cartes rouges**.

Parmi ces 16 cartes rouges, il y a 8 cœurs.

La probabilité que la carte soit un cœur **sachant qu'elle est rouge** est donc : $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

On note cette nouvelle probabilité $P_B(A)$ et on lit « probabilité de A sachant B ».

On a donc : $P(A) = \frac{1}{4}$ alors que $P_B(A) = \frac{1}{2}$.

L'information « la carte est rouge » a donc **modifié la probabilité que la carte soit un cœur**.

C'est précisément ce que permet d'étudier la **probabilité conditionnelle** : la probabilité qu'un événement A se réalise **sachant qu'un autre événement B est réalisé**.

1.2 Définition

Définition

Soient A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$.

La **probabilité de A sachant B** , notée $P_B(A)$, est définie par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

On en déduit immédiatement la formule (à connaître) :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

Cette formule se retrouvera facilement lors de l'utilisation des arbres de probabilités.

1.3 Exemple

Dans une classe, on considère les événements :

- A : « l'élève pratique une activité sportive » ;
- B : « l'élève joue d'un instrument de musique ».

On sait que $P(A) = 0,60$ et $P(A \cap B) = 0,18$.

La probabilité qu'un élève joue d'un instrument de musique sachant qu'il pratique une activité sportive est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,18}{0,60} = 0,30.$$

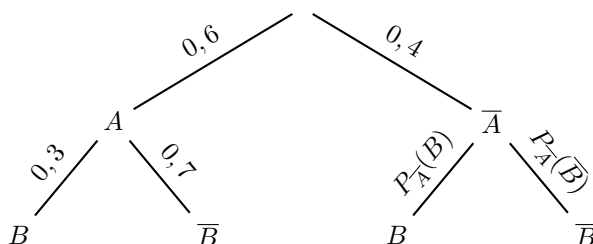
Autrement dit, parmi les élèves qui pratiquent une activité sportive, 30 % jouent d'un instrument de musique.

1.4 Utilisation d'un arbre pondéré

Les probabilités conditionnelles peuvent être représentées à l'aide d'un **arbre pondéré**.

$P(A) = 0,6$ donc $P(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$ et $P_A(B) = 0,3$ donc $P_A(\bar{B}) = 1 - 0,3 = 0,7$.

On peut représenter la situation ainsi :



Propriété

Dans un arbre pondéré, **chaque chemin représente une intersection d'événements**.

La probabilité de cette intersection s'obtient en multipliant les probabilités inscrites sur les branches du chemin.

Ainsi, le chemin correspondant à A puis B représente l'événement $A \cap B$ et :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

Dans notre exemple :

$$P(A \cap B) = 0,6 \times 0,3 = 0,18.$$

1.5 Résolution à l'aide d'un tableau à double entrée

On peut également représenter la situation à l'aide d'un tableau à double entrée.

On sait que $P(A) = 0,60$ et $P(A \cap B) = 0,18$.

Le tableau permet notamment de faire apparaître les probabilités des différentes intersections :

	B	$\overline{B}$	Total
A	0,18	0,42	0,60
$\overline{A}$	$P(B \cap \overline{A})$	$0,4 \times P_{\overline{A}}(\overline{B})$	0,40
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

En effet :

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,60 - 0,18 = 0,42.$$

Pour calculer la probabilité que l'élève joue d'un instrument de musique sachant qu'il pratique une activité sportive, on ne considère que les élèves qui pratiquent une activité sportive.

Parmi ces élèves, la proportion de ceux qui jouent d'un instrument de musique est donc :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,18}{0,60} = 0,30.$$

2 Partition de l'univers et formule des probabilités totales

2.1 Partition de l'univers

Les événements A et $\overline{A}$ constituent une partition de l'univers Ω car :

$$A \cap \overline{A} = \emptyset \text{ et } A \cup \overline{A} = \Omega.$$

Tout "résultat" appartient donc soit à A , soit à $\overline{A}$.

Pour un événement B , on peut alors écrire :

$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B).$$

Les événements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles. Donc :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B).$$

$$\text{Or } P(A \cap B) = P(A)P_A(B) \text{ et } P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B).$$

On obtient ainsi la formule des probabilités totales.

2.2 Formule des probabilités totales

Propriété

Si A et $\overline{A}$ constituent une partition de l'univers, alors :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) \quad \text{où } B \text{ désigne un événement de l'univers } \Omega$$

Cette formule s'étend à un système complet d'événements (partition).

2.3 Exemple

Une entreprise possède deux machines A et $B = \overline{A}$.

- La machine A fabrique 70 % des pièces.
- La machine B fabrique 30 % des pièces.
- 2 % des pièces fabriquées par A sont défectueuses.
- 5 % des pièces fabriquées par B sont défectueuses.

On note D l'événement : « la pièce est défectueuse ».

On connaît :

$$P(A) = 0,7, \quad P(B) = 0,3, \quad P_A(D) = 0,02, \quad P_B(D) = 0,05.$$

Les événements A et B forment une partition de l'univers. Donc :

$$P(D) = P(A)P_A(D) + P(B)P_B(D) = 0,7 \times 0,02 + 0,3 \times 0,05 = 0,014 + 0,015 = 0,029.$$

Ainsi, **2,9 % des pièces produites sont défectueuses.**

3 Indépendance de deux événements

3.1 Exemple

On considère toujours l'expérience aléatoire consistant à **tirer une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes**.

On considère les événements :

- A : « la carte tirée est un as » ;
- B : « la carte tirée est un trèfle ».

On a : $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Supposons maintenant que l'on sache que la carte tirée est un trèfle.

Parmi les 8 trèfles du jeu, il y a exactement **un as de trèfle**.

Ainsi $P_B(A) = \frac{1}{8}$.

On constate donc que : $P_B(A) = P(A)$

L'information « la carte est un trèfle » **ne modifie pas la probabilité que la carte soit un as**.

On dit alors que les événements A et B sont **indépendants**.

3.2 Définition

Définition

Soient A et B deux événements, avec $P(B) \neq 0$.

On dit que les événements A et B sont **indépendants** lorsque la réalisation de B ne modifie pas la probabilité de A .

Autrement dit :

$$P_B(A) = P(A)$$

Cette égalité constitue une caractérisation de l'indépendance à partir de la probabilité conditionnelle.

Deux événements A et B sont indépendants si la connaissance de B ne change pas la probabilité de A .

3.3 Une autre caractérisation de l'indépendance

Nous savons que $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Si A et B sont indépendants, alors $P_B(A) = P(A)$.

On obtient donc $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$.

En multipliant par $P(B)$ on obtient $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

On peut donc caractériser l'indépendance de deux façons :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff P_B(A) = P(A)}$$

et

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff P(A \cap B) = P(A)P(B)}.$$

Vérification avec notre exemple

Pour les événements :

- A : « tirer un as » ;
- B : « tirer un trèfle »,

on a : $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$

car une seule carte est à la fois un as et un trèfle : l'as de trèfle.

D'autre part :

$$P(A)P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}.$$

Ainsi :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

ce qui confirme que A et B sont bien indépendants.

3.4 Attention à ne pas confondre

Attention

Il ne faut pas confondre **événements incompatibles** et **événements indépendants**.
Deux événements A et B sont incompatibles lorsque :

$$A \cap B = \emptyset.$$

Dans ce cas :

$$P(A \cap B) = 0.$$

Deux événements sont indépendants lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ainsi, si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, deux événements incompatibles ne peuvent pas être indépendants.

On retiendra :

incompatibilité $\neq$ indépendance

4 Répétition d'une épreuve de Bernoulli

4.1 Épreuve de Bernoulli

Définition

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui possède exactement deux issues :

- un **succès** ;
- un **échec**.

On note généralement $p = P(S)$ la probabilité du succès. Alors $P(\bar{S}) = 1 - p$ correspond à la probabilité de l'échec.

4.2 Exemples

Sont des épreuves de Bernoulli :

- lancer une pièce : pile / face ;
- répondre à une question : bonne réponse / mauvaise réponse ;
- contrôler une pièce : conforme / défectueuse ;
- tirer une carte : cœur / non-cœur.

4.3 Répétition de deux épreuves indépendantes

Considérons une pièce équilibrée lancée deux fois de suite.

À chaque lancer :

$$P(P) = P(F) = \frac{1}{2}.$$

On suppose que les deux lancers sont indépendants.

Les quatre issues possibles sont : PP , PF , FP , FF .

Comme les deux lancers sont indépendants, la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Ainsi :

$$P(PP) = P(PF) = P(FP) = P(FF) = \frac{1}{4}.$$

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une fois pile ?

Les cas favorables sont : PF et FP .

$$\text{Donc : } P(\text{exactement un pile}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

4.4 Répétition de plusieurs épreuves indépendantes

On peut répéter une même épreuve de Bernoulli plusieurs fois, en conservant les mêmes probabilités et en supposant les épreuves indépendantes.

Par exemple, on lance quatre fois une pièce équilibrée.

À chaque lancer :

$$P(P) = P(F) = \frac{1}{2}.$$

Une suite précise, par exemple : $PFPP$, a pour probabilité : $P(PFPP) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

De manière générale, pour une suite précise de quatre résultats, la probabilité est obtenue en **multipliant les probabilités des différentes étapes**.

4.5 Calculer la probabilité d'un nombre donné de succès

Prenons quatre lancers d'une pièce équilibrée.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois piles ?

Les suites possibles sont :

$PPPF$, $PPFP$, $PFPP$, $FPPP$.

Chaque suite a une probabilité : $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

Il y a quatre suites favorables.

$$\text{Donc : } P(3 \text{ piles}) = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}.$$

Pour un nombre de répétitions pas trop élevé, on peut résoudre ce type de question en construisant un arbre pondéré.

On ne cherche donc pas à utiliser une formule générale : on **construit l'arbre et on dénombre les chemins favorables**.

4.6 Méthode

Méthode

Lorsqu'un problème fait intervenir plusieurs répétitions d'une même épreuve aléatoire :

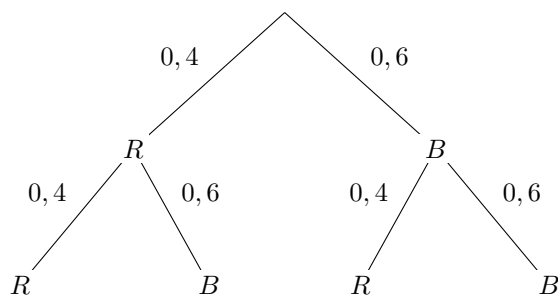
1. Identifier les deux issues de l'épreuve : succès et échec.
2. Construire l'arbre correspondant aux différentes répétitions.
3. Inscrire les probabilités sur les branches.
4. Calculer la probabilité de chaque chemin en multipliant les probabilités des branches.
5. Additionner les probabilités des chemins correspondant à l'événement recherché.

4.7 Exemple

Une urne contient des boules rouges et bleues. On effectue deux tirages indépendants et **avec remise**. On sait :

$$P(R) = 0,4. \text{ Donc } P(B) = 1 - 0,4 = 0,6.$$

Comme les tirages sont indépendants, les probabilités restent les mêmes au deuxième tirage. On peut donc représenter la situation à l'aide de l'arbre pondéré suivant :



La probabilité d'obtenir deux boules rouges correspond au chemin : *racine* $\longrightarrow R \longrightarrow R$

$$P(RR) = 0,4 \times 0,4 = 0,16.$$

La probabilité d'obtenir exactement une boule rouge correspond aux deux chemins $R \longrightarrow B$ et $B \longrightarrow R$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(RB) + P(BR) &= 0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,4 \\ &= 0,24 + 0,24 \\ &= 0,48. \end{aligned}$$

Donc $P(\text{exactement une boule rouge}) = 0,48$.

5 Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo permet d'obtenir une **estimation** d'une probabilité ou d'une grandeur mathématique en réalisant un grand nombre d'expériences aléatoires.

5.1 Estimation de π

On considère un carré de côté 2, centré en O , et le disque de rayon 1 inscrit dans ce carré.

L'aire du carré est 4. L'aire du disque est π .

Ainsi on a : $\frac{\text{aire du disque}}{\text{aire du carré}} = \frac{\pi}{4}$. On choisit au hasard un point dans le carré.

La probabilité que le point appartienne au disque est donc : $P = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi : $\pi = 4P$. Si on simule N points et que n d'entre eux appartiennent au disque, alors : $\frac{n}{N}$ est une estimation de P .

On obtient donc : $\pi \approx 4 \times \frac{n}{N}$.

Plus le nombre N de simulations est grand, plus l'estimation est généralement précise.

5.2 Algorithme

On peut demander à un ordinateur de simuler cette expérience aléatoire.

$N \leftarrow$ nombre de simulations

compteur $\leftarrow 0$

Pour i allant de 1 à N :

 choisir au hasard x entre -1 et 1

 choisir au hasard y entre -1 et 1

 Si $x^2 + y^2 < 1$:

 compteur $\leftarrow$ compteur + 1

$\text{pi_estimé} \leftarrow 4 \times \text{compteur} / N$

Afficher pi_estimé

5.3 Programme Python

Voici le programme correspondant dans le langage Python

```
import random

N = 100000
compteur = 0

for i in range(N):
    x = random.uniform(-1, 1)
    y = random.uniform(-1, 1)

    if x**2 + y**2 < 1:
        compteur += 1

pi_estime = 4 * compteur / N

print(pi_estime)
```

Par exemple, avec $N = 100\,000$, on peut obtenir une valeur proche de 3,14.

La valeur obtenue varie légèrement d'une simulation à l'autre.

6 Bilan du chapitre

Probabilité conditionnelle

Pour $P(B) \neq 0$:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

donc :

$$P(A \cap B) = P(B)P_B(A).$$

Formule des probabilités totales

Si A et $\bar{A}$ constituent une partition de l'univers :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B).$$

Indépendance

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \iff P_B(A) = P(A)$$

et :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \iff P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Arbre pondéré

$$\text{Probabilité d'un chemin} = \text{produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.}$$

et :

$$\text{Probabilité d'un événement} = \text{somme des probabilités inscrites sur les branches des chemins favorables.}$$

Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli possède deux issues :

$$\text{succès / échec}$$

avec :

$$P(S) = p \quad \text{et} \quad P(\bar{S}) = 1 - p.$$

Il est également possible de répéter un certain nombre de fois, de manière indépendante et identique, une même épreuve de Bernoulli : on utilise alors un arbre de probabilité.