Les identités remarquables

Cours et exercices – Seconde

Objectifs du chapitre

À la fin de ce chapitre, il faut savoir :

- démontrer et mémoriser les trois identités remarquables ;
- développer une expression en reconnaissant une identité ;
- factoriser une expression en reconnaissant une forme remarquable ;
- choisir entre développement, factorisation et calcul direct.

Idée directrice : comprendre les formules, savoir les retrouver, puis les reconnaître dans les deux sens.

1 Les trois identités remarquables

1.1 Carré d'une somme

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Le carré d'une somme est égal au carré du premier terme, plus deux fois le produit des deux termes, plus le carré du second terme.

Démonstration par le calcul

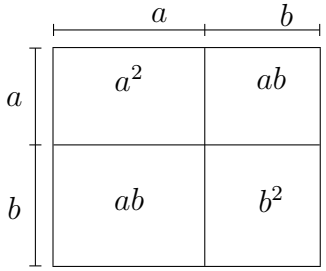
On écrit le carré comme un produit :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a\times a + a\times b + b\times a + b\times b\\ &= a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Démonstration géométrique

On considère un carré de côté $a+b$, avec a et b positifs. Son aire vaut $(a+b)^2$. En le découpant, on obtient un carré d'aire a^2, un carré d'aire b^2 et deux rectangles d'aire ab chacun. Ainsi,

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



Exemple

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 \\ &= x^2 + 6x + 9, \\ (2x+5)^2 &= (2x)^2 + 2 \times (2x) \times 5 + 5^2 \\ &= 4x^2 + 20x + 25.\end{aligned}$$

Attention

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2.$$

Le terme $2ab$, appelé *double produit*, ne doit pas être oublié.

1.2 Carré d'une différence

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Démonstration à partir de la première identité

On écrit $a - b = a + (-b)$, puis on applique l'identité remarquable précédente :

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a+(-b))^2 \\ &= a^2 + 2 \times a \times (-b) + (-b)^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned}(x-4)^2 &= x^2 - 8x + 16, \\ (3x-2)^2 &= 9x^2 - 12x + 4, \\ (2x-5y)^2 &= 4x^2 - 20xy + 25y^2.\end{aligned}$$

Le dernier terme est toujours positif, car il s'agit du carré du second terme. Ainsi, $(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$, et non $x^2 - 14x - 49$.

1.3 Produit d'une somme par une différence

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Les termes $-ab$ et $+ab$ s'annulent.

Exemple

$$(x+5)(x-5) = x^2 - 25,$$
$$(3x+2)(3x-2) = 9x^2 - 4,$$
$$(2x+7)(2x-7) = 4x^2 - 49.$$

Cette identité permet aussi de calculer rapidement :

$$\begin{aligned} 103 \times 97 &= (100+3)(100-3) \\ &= 100^2 - 3^2 \\ &= 10\,000 - 9 \\ &= 9\,991. \end{aligned}$$

1.4 Tableau récapitulatif

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Carré du premier, plus double produit, plus carré du second.

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Carré du premier, moins double produit, plus carré du second.

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Carré du premier moins carré du second.

Astuce de mémorisation : les deux premières identités se terminent par un signe + devant b^2. Dans la troisième, on obtient une différence de deux carrés.

2 Développer avec les identités remarquables

Développer, c'est transformer un produit en une somme ou une différence.

Méthode

1. Repérer la forme de l'expression.
2. Identifier les deux termes a et b.
3. Écrire l'identité correspondante.
4. Remplacer a et b par leurs expressions.
5. Réduire si nécessaire.

Exemple

Développer $A = (x+6)^2$.
On reconnaît $(a+b)^2$, avec $a = x$ et $b = 6$.

$$\begin{aligned} A &= x^2 + 2 \times x \times 6 + 6^2 \\ &= x^2 + 12x + 36. \end{aligned}$$

Exemple

Développer $B = (2x-3)^2$.
Ici, $a = 2x$ et $b = 3$.

$$\begin{aligned} B &= (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 3 + 3^2 \\ &= 4x^2 - 12x + 9. \end{aligned}$$

Exemple

Développer $C = (5x+4)(5x-4)$.

$$C = (5x)^2 - 4^2 = 25x^2 - 16.$$

Expression	Résultat
$(x+3)^2$	$x^2 + 6x + 9$
$(x-3)^2$	$x^2 - 6x + 9$
$(x+3)(x-3)$	$x^2 - 9$
$(2x+3)^2$	$4x^2 + 12x + 9$

Attention

Les expressions $(x-3)^2$ et $(x+3)(x-3)$ sont différentes et ne se développent pas de la même façon.

3 Factoriser avec les identités remarquables

Factoriser, c'est transformer une somme ou une différence en un produit. Il faut reconnaître les identités dans l'autre sens.

3.1 Reconnaître le carré d'une somme

On considère $x^2 + 10x + 25$.

- x^2 est le carré de x ;
- $25 = 5^2$;
- $10x = 2 \times x \times 5$.

Donc

$$\boxed{x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2}.$$

3.2 Reconnaître le carré d'une différence

On considère $4x^2 - 12x + 9$.

On a $4x^2 = (2x)^2$, $9 = 3^2$ et $-12x = -2 \times 2x \times 3$. Ainsi,

$$\boxed{4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2}.$$

3.3 Reconnaître une différence de deux carrés

On considère $9x^2 - 16$.

On remarque que $9x^2 = (3x)^2$ et $16 = 4^2$. Donc

$$\boxed{9x^2 - 16 = (3x + 4)(3x - 4)}.$$

Attention

Pour appliquer la troisième identité, il faut une différence de deux carrés. Une somme de deux carrés, comme $x^2 + 25$, ne convient pas à cette identité sur les nombres réels.

3.4 Exemples plus élaborés

Exemple 1 :

$$25x^2 - 30x + 9 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 3 + 3^2$$

donc

$$\boxed{25x^2 - 30x + 9 = (5x - 3)^2}.$$

Exemple 2 :

$$F = (x + 2)^2 - 49.$$

C'est une différence de deux carrés, avec $a = x + 2$ et $b = 7$.

$$\begin{aligned} F &= (x + 2 + 7)(x + 2 - 7) \\ &= (x + 9)(x - 5). \end{aligned}$$

4 Exercices

Exercice 1 – Développements directs

Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A = (x + 4)^2$
2. $B = (x - 7)^2$
3. $C = (x + 9)(x - 9)$
4. $D = (2x + 5)^2$
5. $E = (3x - 4)^2$
6. $F = (4x + 1)(4x - 1)$

Exercice 2 – Développements avec des coefficients

Développer et réduire.

1. $A = (5x + 2)^2$
2. $B = (3x - 7)^2$
3. $C = (2x + 3y)^2$
4. $D = (4x - 5y)^2$
5. $E = (7x + 2)(7x - 2)$
6. $F = (6x - 5)^2 - (6x + 5)^2$

Pour la dernière expression, on peut développer séparément les deux carrés, puis réduire.

Exercice 3 – Factorisations directes

Factoriser les expressions suivantes.

1. $A = x^2 + 8x + 16$
2. $B = x^2 - 14x + 49$
3. $C = x^2 - 36$
4. $D = 4x^2 + 12x + 9$
5. $E = 25x^2 - 20x + 4$
6. $F = 49x^2 - 1$

Exercice 4 – Compléter puis factoriser

Pour chaque égalité, compléter les pointillés afin d'obtenir une identité remarquable, puis factoriser l'expression.

1. $\ldots - 6x + 9 = (x - \ldots)^2$
2. $x^2 + \ldots + \ldots = (x + 4)^2$
3. $x^2 - \ldots + 25 = (x - \ldots)^2$
4. $\ldots + 14x + 49 = (x + \ldots)^2$
5. $4x^2 - \ldots + \ldots = (2x - 3)^2$
6. $9x^2 + \ldots + 4 = (3x + \ldots)^2$
7. $\ldots - 20x + 4 = (5x - \ldots)^2$
8. $16x^2 + \ldots + \ldots = (4x + 5)^2$
9. $x^2 - \ldots + 36 = (x - \ldots)^2$
10. $4x^2 + \ldots + 1 = (2x + \ldots)^2$
11. $\ldots - 24x + 16 = (3x - \ldots)^2$
12. $25x^2 + \ldots + \ldots = (5x + 7)^2$

Attention : il faut vérifier les trois éléments de l'identité remarquable : le premier carré, le double produit et le second carré.

Exercice 5 – Calcul mental et raisonnement

1. Calculer 99^2 sans poser la multiplication.
2. Calculer 102×98 sans poser la multiplication.
3. Calculer $203^2 - 197^2$ en utilisant une identité remarquable.
4. Déterminer le nombre positif x tel que $x^2 - 64 = 0$.
5. Un élève affirme que $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 9$. Expliquer son erreur et donner le résultat correct.

Exercice 6 – Compléter les identités remarquables

Compléter les pointillés pour obtenir une identité remarquable, puis écrire l'expression factorisée ou développée demandée.

A. Carré d'une différence

1. $(x - \ldots)^2 = x^2 - 10x + \ldots$
2. $(2x - \ldots)^2 = 4x^2 - \ldots + 25$
3. $x^2 - \ldots + 49 = (x - \ldots)^2$
4. $(\ldots - 3)^2 = 9x^2 - \ldots + 9$
5. $16x^2 - \ldots + 1 = (\ldots - 1)^2$

B. Produit d'une somme par une différence

6. $(x - \ldots)(x + \ldots) = x^2 - 25$
7. $(3x - \ldots)(3x + \ldots) = 9x^2 - 16$
8. $x^2 - \ldots = (x - 7)(x + 7)$
9. $(\ldots - 5)(\ldots + 5) = 4x^2 - 25$
10. $25x^2 - \ldots = (5x - 2)(5x + 2)$

5 Une démonstration supplémentaire

On peut retrouver une relation utile à partir des deux premières identités :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

et

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

En soustrayant la seconde égalité de la première, on obtient :

$$\boxed{(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab}.$$

Cette relation n'est pas une quatrième identité remarquable à mémoriser, mais elle permet de vérifier des calculs et de faire des liens entre les trois formules.

6 Bilan à retenir

- ☐ Je sais réciter les trois identités remarquables sans erreur.
- ☐ Je sais développer un carré de somme ou de différence.
- ☐ Je sais développer un produit d'une somme par une différence.
- ☐ Je sais reconnaître un carré parfait dans une expression développée.
- ☐ Je sais factoriser une différence de deux carrés.
- ☐ Je sais expliquer pourquoi le double produit intervient dans les deux premières identités.

Conseil de travail : consacrer un temps régulier à la factorisation. Il est fréquent de savoir appliquer une formule lorsqu'elle est écrite sous forme de produit, mais de moins bien la reconnaître dans une expression développée. Des exercices courts et fréquents permettent de consolider ces automatismes.