

Arithmétique

Bruno REDON

29 juillet 2026

Table des matières

1	Arithmétique	2
1.1	Les ensembles d'entiers	2
1.1.1	Les entiers naturels	2
1.1.2	Les entiers relatifs	2
1.2	La division euclidienne	3
1.3	La divisibilité	3
1.3.1	Multiples	3
1.4	Les nombres pairs et impairs	4
1.4.1	Définitions	4
1.5	Les fractions irréductibles	5
1.6	Algorithmique (Python)	5

Chapitre 1

Arithmétique

1.1 Les ensembles d'entiers

1.1.1 Les entiers naturels

Définition 1.1. L'ensemble des **entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

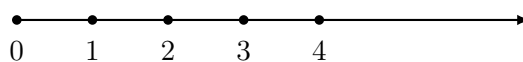
Les entiers naturels sont les nombres utilisés pour compter.

Définition 1.2. L'ensemble des **entiers naturels non nul** est noté $\mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

0, historiquement, est apparu après 1, 2, ... etc.

Représentation des entiers naturels



Exemple 1.3.

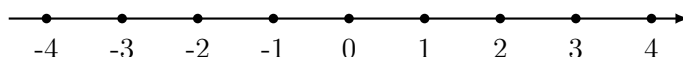
$$0 \in \mathbb{N}, \quad 0 \notin \mathbb{N}^*, \quad 7 \in \mathbb{N}, \quad 10^5 \in \mathbb{N}.$$

1.1.2 Les entiers relatifs

Définition 1.4. L'ensemble des **entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Représentation des entiers relatifs



Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs.

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}}$$

Exemple 1.5.

$$-8 \in \mathbb{Z} \quad \text{mais} \quad -8 \notin \mathbb{N}.$$

1.2 La division euclidienne

Définition 1.6. Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que

$$a = bq + r$$

avec

$$0 \leq r < b.$$

Le nombre q est le **quotient** et r le **reste** de la division euclidienne de a par b .

Exemple 1.7. La division euclidienne de 47 par 6 est

$$47 = 6 \times 7 + 5.$$

Le quotient est 7 et le reste est 5.

Remarque 1.8. Lorsque le reste est nul, on dit que b divise a .

1.3 La divisibilité

1.3.1 Multiples

Définition 1.9. Soient a et b deux entiers (relatifs).

On dit que a est un **multiple** de b lorsqu'il existe un entier k tel que

$$a = kb.$$

Exemple 1.10.

$$30 = 5 \times 6.$$

Ainsi, 30 est un multiple de 5 et de 6.

L'ensemble des multiples positifs (au sens large) de 7 est $\{0, 7, 14, 21, \dots\}$.

Définition 1.11. On dit que b est un **diviseur** de a lorsque a est un multiple de b .

On note

$$b \mid a.$$

Exemple 1.12.

$$8 \mid 56$$

car

$$56 = 8 \times 7.$$

En revanche, 9 ne divise pas 56 car

$$9 \times 6 = 54 \quad \text{et} \quad 9 \times 7 = 63.$$

Propriété 1.13. *La somme de deux multiples d'un même entier est encore un multiple de cet entier.*

Démonstration. Soient x et y deux multiples de a . Alors il existe deux entiers k et l tel que :

$$x = ka \quad \text{et} \quad y = la,$$

où k et l sont des entiers.

Alors

$$x + y = ka + la = (k + l)a.$$

Or $k + l$ est un entier.

Donc $x + y$ est un multiple de a .

□

1.4 Les nombres pairs et impairs

1.4.1 Définitions

Définition 1.14. Un entier est **pair** lorsqu'il est multiple de 2.

Autrement dit,

$$n = 2k$$

où k est un entier.

Définition 1.15. Un entier est **impair** lorsqu'il peut s'écrire

$$n = 2k + 1$$

où k est un entier.

Exemple 1.16.

$$24 = 2 \times 12$$

est pair.

$$35 = 2 \times 17 + 1$$

est impair.

Propriété 1.17. *Le carré d'un nombre impair est impair.*

Démonstration. Soit

$$n = 2k + 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1. \end{aligned}$$

Comme $2k^2 + 2k$ est un entier,

$$n^2 = 2m + 1.$$

Ainsi, le carré d'un nombre impair est impair.

□

1.5 Les fractions irréductibles

Remarque 1.18. Tout entier peut être considéré comme une fraction ayant 1 pour dénominateur :

$$5 = \frac{5}{1}.$$

Cette écriture présente peu d'intérêt. Dans ce chapitre, lorsqu'on parle de **fraction irréductible**, on sous-entend que le dénominateur est différent de 1.

Définition 1.19. Une fraction est dite **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont aucun diviseur (positif) commun autre que 1.

Exemple 1.20. La fraction $\frac{18}{24}$ n'est pas irréductible puisque

$$\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

(en effet 18 et 24 sont tous deux divisibles par 6.)

En revanche,

$$\frac{5}{7}$$

est irréductible car les seuls diviseurs communs à 5 et 7 sont 1 et -1 .

1.6 Algorithmique (Python)

Déterminer si un entier est multiple d'un autre

```
a = int(input("Entrer un entier a : "))
b = int(input("Entrer un entier b : "))

if a % b == 0:
    print(a, "est un multiple de", b)
else:
    print(a, "n'est pas un multiple de", b)
```

Déterminer le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b

```
a = int(input("Entrer un entier a : "))
b = int(input("Entrer un entier b : "))

q = b // a
m = q * a

print("Le plus grand multiple de", a,
      "inférieur ou égal à", b,
      "est", m)
```

Remarque 1.21. Le code `a=int(input(...))` demande à l'utilisateur de donner un entier (integer) qui sera placé dans la variable `a`. L'opérateur `//` désigne la division entière. Il renvoie le quotient de la division euclidienne. L'opérateur `==` teste l'égalité contrairement à l'opérateur `=` qui affecte une variable.