Intervalles de $\mathbb{R}$

Fiche de cours et exercices — Seconde

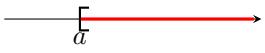
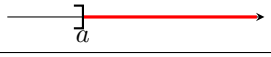
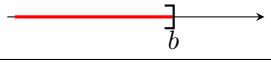
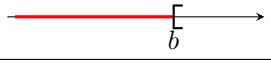
1. Droite numérique et intervalles

Tout nombre réel est repéré par un point d'une droite graduée, appelée **droite numérique**. Réciproquement, chaque point de la droite a pour abscisse un nombre réel. On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Intervalle

Un **intervalle** de $\mathbb{R}$ est un ensemble de nombres réels vérifiant une ou plusieurs inégalités, c'est-à-dire l'ensemble des réels « compris entre » deux bornes (ou situés d'un même côté d'une borne).

Dans le tableau suivant, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Inégalité	Intervalle	Représentation	Nom
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a\,;b]$		fermé
$a < x < b$	$]a\,;b[$		ouvert
$a \leqslant x < b$	$[a\,;b[$		semi-ouvert
$a < x \leqslant b$	$]a\,;b]$		semi-ouvert
$x \geqslant a$	$[a\,;+\infty[$		
$x > a$	$]a\,;+\infty[$		
$x \leqslant b$	$]-\infty\,;b]$		
$x < b$	$]-\infty\,;b[$		
tout réel x	$\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$		

À retenir

— Un crochet **tourné vers l'intervalle** signifie que la borne est **incluse** ; un crochet **tourné vers l'extérieur** signifie que la borne est **exclue**.

— $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des nombres réels : le crochet est toujours **ouvert** du côté de l'infini.

— Dans $[a\,;b]$, a est la borne inférieure, b la borne supérieure, et $b-a$ est la **longueur** de l'intervalle.

— On sépare les bornes par un point-virgule, car les nombres décimaux s'écrivent avec une virgule : $[1{,}5\,;2{,}5]$.

Exemples

— $x \in [-2\,;3[$ signifie $-2 \leqslant x < 3$. On a $-2 \in [-2\,;3[$ mais $3 \notin [-2\,;3[$.

— L'ensemble des solutions de $x > 5$ est l'intervalle $]5\,;+\infty[$.

— $\pi \in [3\,;4]$ car $3 \leqslant \pi \leqslant 4$; $\sqrt{2} \notin]2\,;3[$ car $\sqrt{2} < 2$.

2. Intersection et réunion d'intervalles

Intersection et réunion

Soient I et J deux intervalles.

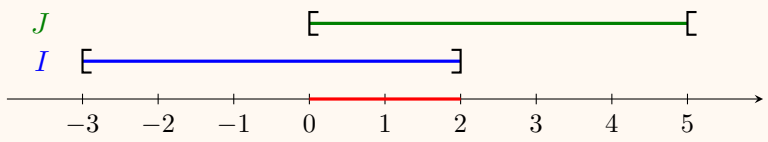
— L'**intersection** $I \cap J$ (« I inter J ») est l'ensemble des réels qui appartiennent **à la fois** à I **et** à J.

— La **réunion** $I \cup J$ (« I union J ») est l'ensemble des réels qui appartiennent à I **ou** à J (au moins l'un des deux).

Si I et J n'ont aucun réel en commun, on écrit $I \cap J = \varnothing$ (ensemble vide).

Exemple

Soit $I = [-3\,;2]$ et $J = [0\,;5[$.



On lit : $I \cap J = [0\,;2]$ et $I \cup J = [-3\,;5[$.

Exercices

Intervalles de $\mathbb{R}$ — Seconde

Exercice 1 *(Traduire)*

Compléter le tableau.

Inégalité	**Intervalle**
$2 \leqslant x < 5$	
$x > -3$	
	$[-1\,;4]$
	$]-\infty\,;0]$
$-1 < x \leqslant 4$	
	$]-2\,;7[$

Exercice 2 *(Représenter)*

Représenter sur une droite graduée (une droite par intervalle) les intervalles suivants :

a) $[-2\,;3]$ b) $]1\,;+\infty[$ c) $]-\infty\,;2]$ d) $[0\,;4[$

Exercice 3 *(Appartenance)*

Pour chacun des intervalles $I = [-2\,;3]$, $J =]-\infty\,;0[$ et $K =]1\,;+\infty[$, indiquer lesquels des nombres suivants lui appartiennent :

$$-2\ ;\quad 0\ ;\quad 1\ ;\quad \sqrt{2}\ ;\quad \pi\ ;\quad -\frac{7}{3}\ ;\quad 3{,}001.$$

Exercice 4 *(Inéquations)*

Résoudre les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle :

a) $3x - 5 \leqslant 7$ b) $-2x + 1 < 5$ c) $2x + 3 \geqslant x - 1$ d) $5(x - 1) > 2x + 4$

Exercice 5 *(Intersection et réunion)*

Déterminer, en s'aidant d'une droite graduée :

a) $[-3\,;2] \cap [0\,;5]$ b) $]-\infty\,;1[\cup [-1\,;4]$ c) $[-2\,;1[\cap]1\,;3]$ d) $]-\infty\,;3] \cap]-1\,;+\infty[$

Exercice 6 *(Vrai ou faux ?)*

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.

a) $2 \in]-\infty\,;2]$.
b) $[1\,;2] \subset]1\,;2[$.
c) $-\sqrt{2} \in [-2\,;-1]$.
d) $+\infty \in [0\,;+\infty[$.
e) L'intervalle $]2\,;3[$ ne contient aucun nombre entier, donc il est vide.

Exercice 7 *(Entiers d'un intervalle)*

Combien d'entiers relatifs appartiennent à chacun des intervalles suivants ? Les citer.

a) $[-2\,;5[$ b) $]-1\,;3]$ c) $]2\,;3[$ d) $[1{,}5\,;4{,}2]$

Exercice 8 *(Double inégalité)*

Résoudre $-5 \leqslant 3x+1 < 7$ et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.

Exercice 9 *(Deux conditions)*

Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant à la fois $2x-1>3$ et $5-x \geqslant 0$. On donnera le résultat sous forme d'intervalle, après avoir représenté chaque condition sur une même droite graduée.

Exercice 10 *(Des mots aux intervalles)*

Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des réels :

a) strictement supérieurs à -4 ;
b) inférieurs ou égaux à $\dfrac{7}{2}$;
c) compris entre -1 et 2, avec -1 inclus et 2 exclu.

Exercice 11 *(Opérations sur les intervalles)*

On considère $A=]-\infty\,;2]$, $B=[-1\,;5[$ et $C=]3\,;+\infty[$. Déterminer $A\cap B$, $A\cup B$, $B\cap C$, $B\cup C$ et $A\cap C$.

Exercice 12 *(Encadrer)*

Soit x un réel appartenant à $[1\,;4]$. Dans quel intervalle se trouvent $2x+3$, $-x$ et $5-2x$?

Exercice 13 *(Problèmes)*

a) Un médicament doit être conservé à une température T (en °C) comprise entre 2 et 8 inclus. Écrire cette condition à l'aide d'une inégalité, puis à l'aide d'un intervalle.
b) Un fabricant garantit que la masse m (en g) d'un paquet de farine est comprise entre 245 et 255, bornes comprises. Écrire cette condition sous forme d'intervalle. Un paquet de 244,8 g est-il conforme ? Un paquet de 255 g l'est-il ?

Exercice 14 *(Pour aller plus loin)*

Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant à la fois $-3 < 2x+1 \leqslant 1$ et $x \geqslant -1$.