Fiche 2 – Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Classe de Seconde

Partie A : Cours

1 Le principe

Résoudre *graphiquement* une équation ou une inéquation, c'est lire sur une courbe les valeurs de x qui conviennent, sans calcul. Le résultat est un **ensemble de solutions** S (un ensemble de réels, souvent une réunion d'intervalles), qui doit être inclus dans l'ensemble de définition de la fonction.

Propriété : équations et inéquations du type $f(x) \square k$

Soit f une fonction, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative, k un réel, et Δ_k la droite horizontale d'équation $y = k$.

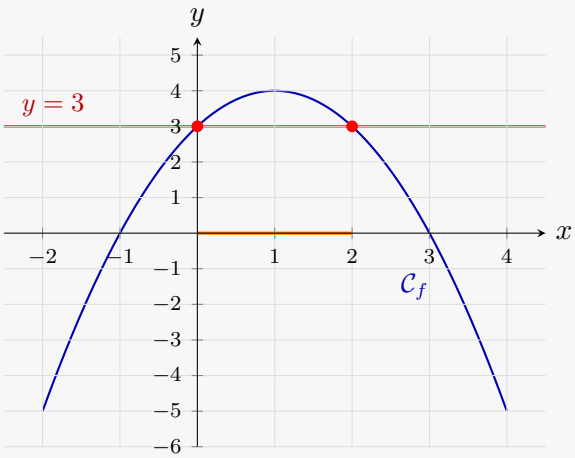
Problème	Lecture graphique
$f(x) = k$	abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et Δ_k
$f(x) < k$	abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés **strictement en dessous** de Δ_k
$f(x) \leqslant k$	abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés en dessous de Δ_k **ou sur** Δ_k
$f(x) > k$	abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés **strictement au dessus** de Δ_k
$f(x) \geqslant k$	abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au dessus de Δ_k **ou sur** Δ_k

Méthode : résoudre $f(x) = k$ ou $f(x) < k$ graphiquement

1. Repérer k sur l'axe des ordonnées et tracer la droite horizontale $y = k$.
2. Repérer les points d'intersection avec $\mathcal{C}_f$ (et, pour une inéquation, les portions de $\mathcal{C}_f$ situées du bon côté de la droite).
3. Descendre (ou monter) vers l'axe des abscisses pour lire les valeurs de x.
4. Écrire l'ensemble S en faisant attention aux **crochets** : ils sont *fermés* pour une inégalité large ($\leqslant$, $\geqslant$) et *ouverts* pour une inégalité stricte ($<$, $>$).

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[-2\,;4]$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, de courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous.



- $f(x) = 3$: la droite $y = 3$ coupe $\mathcal{C}_f$ en deux points d'abscisses 0 et 2. Donc $S = \{0\,;2\}$.
- $f(x) \geqslant 3$: $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite (ou sur elle) pour x entre 0 et 2. Donc $S = [0\,;2]$ (surligné en orange). Pour $f(x) > 3$, on aurait $S =]0\,;2[$.
- $f(x) < 3$: $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite pour x avant 0 ou après 2. Donc $S = [-2\,;0[\cup]2\,;4]$.
- $f(x) = 4$: la droite $y = 4$ touche $\mathcal{C}_f$ en un seul point (le sommet), d'abscisse 1. Donc $S = \{1\}$.
- $f(x) = 5$: la droite $y = 5$ ne coupe pas $\mathcal{C}_f$. Donc $S = \varnothing$ (pas de solution).

Remarque

Une équation $f(x) = k$ peut avoir *aucune*, *une* ou *plusieurs* solutions, selon le nombre de points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et la droite $y = k$. La valeur de k n'a pas à être une image « raisonnable » : si k n'est atteint par aucun point de la courbe, il n'y a pas de solution.

2 Cas particulier : le signe d'une fonction

Propriété : $f(x) = 0$ et signe de f

La droite $y = 0$ est l'axe des abscisses.

- Les solutions de $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses (on les appelle les **zéros** ou **racines** de f).
- $f(x) > 0$ lorsque $\mathcal{C}_f$ est **au dessus** de l'axe des abscisses, $f(x) < 0$ lorsque $\mathcal{C}_f$ est **en dessous**.

Exemple

Avec la fonction précédente, $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en -1 et 3.

- $f(x) = 0 \iff x \in \{-1\,;3\}$.
- $f(x) > 0 \iff x \in]-1\,;3[$ et $f(x) < 0 \iff x \in [-2\,;-1[\cup]3\,;4]$.

3 Comparer deux fonctions

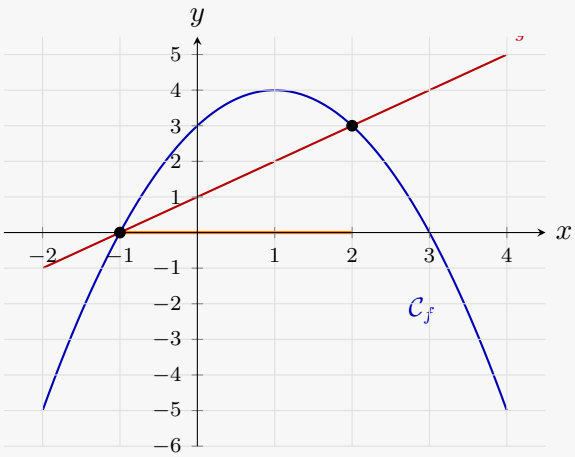
Propriété : équations et inéquations du type $f(x) \square g(x)$

Soit f et g deux fonctions, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ tracées dans le même repère.

- $f(x) = g(x)$: abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- $f(x) > g(x)$: abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est **strictement au dessus** de $\mathcal{C}_g$.
- $f(x) < g(x)$: abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est **strictement en dessous** de $\mathcal{C}_g$.
- Pour $f(x) \geqslant g(x)$ et $f(x) \leqslant g(x)$, on ajoute les abscisses des points d'intersection.

Exemple

Soit $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ et $g(x) = x + 1$, définies sur $[-2\,;4]$.



Les courbes se coupent aux points d'abscisses -1 et 2.

- $f(x) = g(x) \iff x \in \{-1\,;2\}$.
- $f(x) > g(x) \iff x \in]-1\,;2[$ ($\mathcal{C}_f$ au dessus de $\mathcal{C}_g$, surligné en orange).
- $f(x) \leqslant g(x) \iff x \in [-2\,;-1] \cup [2\,;4]$.

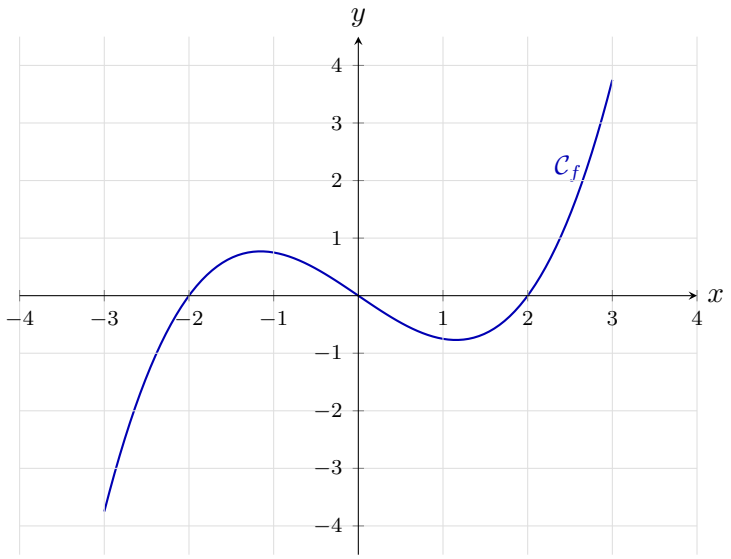
4 Précision, vérification et outils

Remarque

- Une lecture graphique donne souvent des **valeurs approchées** : on écrit « environ », ou on donne une valeur arrondie au dixième.
- Les solutions doivent appartenir à l'**ensemble de définition** de la fonction : on ne lit rien en dehors de la portion de courbe tracée.
- Lorsque c'est possible, on **vérifie par le calcul** : par exemple, $f(x) = 3 \iff -x^2+2x = 0 \iff x(2-x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$.
- Un logiciel de géométrie dynamique, un grapheur ou la calculatrice permettent de tracer les courbes et de lire les coordonnées des points d'intersection avec une bonne précision.

Partie B : Exercices

On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-3\,;3]$. Elle sert pour les exercices 1 et 2.



Exercice 1 – Équations $f(x) = k$

Pour chaque valeur de k, résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$. On donnera le nombre de solutions et leurs valeurs (approchées au dixième si nécessaire).

$$k = 0 \qquad k = 0{,}5 \qquad k = 1 \qquad k = -1 \qquad k = 5$$

Exercice 2 – Inéquations avec la courbe $\mathcal{C}_f$

En utilisant la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessus, résoudre graphiquement les inéquations suivantes. On écrira l'ensemble des solutions sous forme d'intervalles (valeurs approchées au dixième).

a) $f(x) > 0$

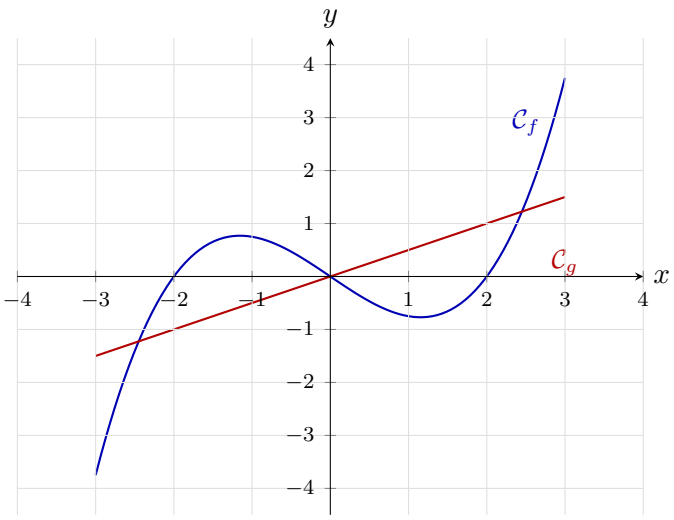
b) $f(x) \leqslant 0$

c) $f(x) \geqslant 1$

d) $f(x) < -1$

Exercice 3 – Deux courbes

On trace dans le même repère la courbe $\mathcal{C}_f$ de l'exercice 1 et la droite $\mathcal{C}_g$ représentant la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x}{2}$.



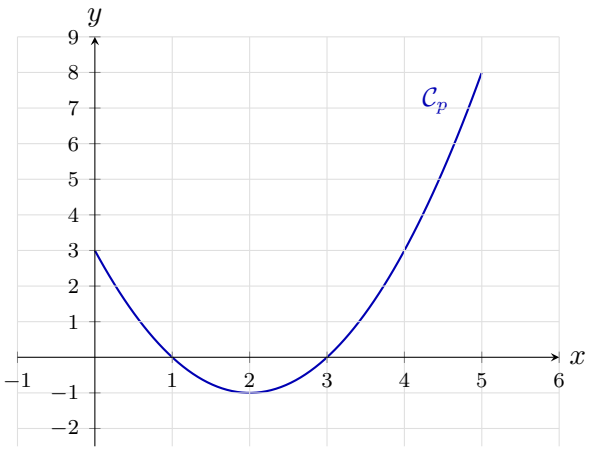
a) Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.

b) Résoudre graphiquement $f(x) > g(x)$, puis $f(x) \leqslant g(x)$.

c) Vérifier par le calcul que $f(x) = g(x)$ équivaut à $x(x^2-6) = 0$, sachant que $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{4}$. En déduire les valeurs exactes des solutions et les comparer avec la lecture graphique.

Exercice 4 – Discussion selon un paramètre

On donne la courbe $\mathcal{C}_p$ de la fonction p définie sur $[0\,;5]$ par $p(x) = x^2 - 4x + 3$.



Soit m un nombre réel. On considère l'équation (E_m) : $p(x) = m$.

a) Résoudre graphiquement (E_m) pour $m = -2$, $m = -1$, $m = 0$, $m = 3$ et $m = 6$.

b) Déterminer, selon les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation (E_m) (on pourra faire varier la droite horizontale $y = m$).

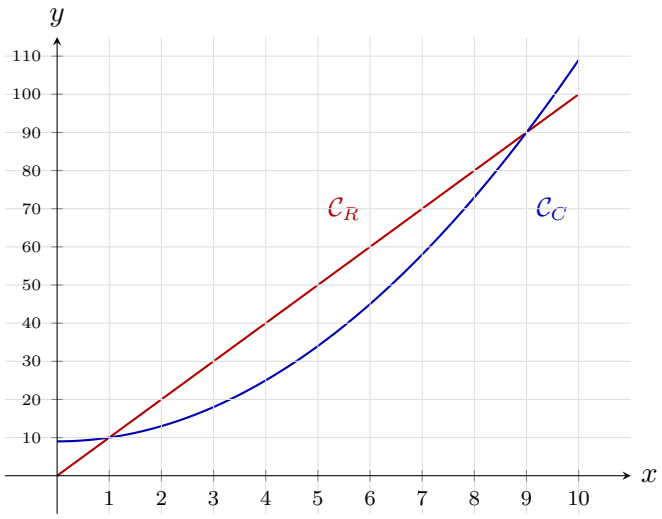
c) Résoudre graphiquement l'inéquation $p(x) < 0$ et vérifier par le calcul en factorisant $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.

Exercice 5 – Problème : seuil de rentabilité

Une entreprise fabrique et vend des objets. On note x le nombre d'objets fabriqués et vendus, en centaines, avec $x \in [0\,;10]$. On note $R(x)$ la recette et $C(x)$ le coût de production, en milliers d'euros, avec

$$R(x) = 10x \qquad \text{et} \qquad C(x) = x^2 + 9.$$

Les courbes $\mathcal{C}_R$ et $\mathcal{C}_C$ sont tracées ci-dessous.



a) Associer chaque courbe à la fonction qu'elle représente. Justifier.

b) Résoudre graphiquement l'équation $R(x) = C(x)$. Que représentent ces solutions pour l'entreprise ?

c) Résoudre graphiquement l'inéquation $R(x) > C(x)$. Pour quelles quantités l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

d) Vérifier par le calcul que $R(x) = C(x) \iff (x-1)(x-9) = 0$.

e) Calculer le bénéfice $R(x) - C(x)$ lorsque $x = 4$ (c'est-à-dire pour 400 objets).

Exercice 6 – Avec un outil numérique

Soit f et g les fonctions définies sur $[-2{,}5\,;2{,}5]$ par $f(x) = x^3 - 3x$ et $g(x) = x$.

a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, d'un grapheur ou de la calculatrice, tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$ (valeurs approchées au centième).

c) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$. Vérifier par le calcul que $f(x) = g(x) \iff x(x-2)(x+2) = 0$.

d) En déduire graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$.

Exercice 7 – Programme Python : recherche approchée de solutions

On considère la fonction $f(x) = x^3 - 3x$ de l'exercice précédent et le programme suivant.

```
def f(x):
    return x**3 - 3*x

def balayage(f, k, a, b, pas):
    x = a
    while x < b:
        if (f(x) - k) * (f(x + pas) - k) <= 0:
            print("solution entre", round(x, 2), "et", round(x + pas, 2))
        x = x + pas

balayage(f, 1, -2.5, 2.5, 0.01)
```

a) Expliquer ce que fait la boucle `while`. Que signifie la condition `(f(x) - k) * (f(x + pas) - k) <= 0` ?

b) Exécuter ce programme. Comparer les résultats obtenus avec ceux de l'exercice 6.

c) Modifier l'appel de la fonction pour résoudre $f(x) = -1$ sur $[-2{,}5\,;2{,}5]$. Combien de solutions trouve-t-on ?

d) Que se passerait-il si l'on prenait un pas plus grand, par exemple 0,5 ? Pourquoi un pas plus petit donne-t-il un résultat plus précis ?