Fiche 3 – Variations et extremums (Seconde)

Partie A : Cours

1 Sens de variation d'une fonction

Définition : fonction croissante, décroissante, monotone

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est **croissante** sur I si, pour tous réels a et b de I : $a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$. La fonction *conserve* l'ordre.
- f est **décroissante** sur I si, pour tous réels a et b de I : $a < b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$. La fonction *renverse* l'ordre.
- f est **constante** sur I si $f(a) = f(b)$ pour tous a et b de I.
- f est **monotone** sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

On parle de croissance (resp. décroissance) **stricte** lorsque les inégalités sont strictes : $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ (resp. $f(a) > f(b)$).

Remarque

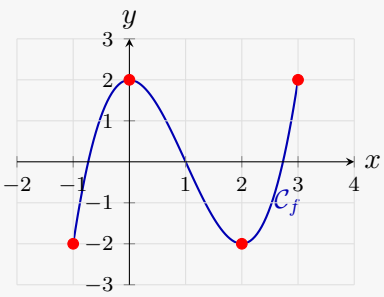
Graphiquement, quand on se déplace de gauche à droite : si f est croissante, la courbe *monte* ; si f est décroissante, la courbe *descend*. Attention : une fonction n'est pas forcément monotone sur son ensemble de définition entier, elle peut être croissante sur un intervalle et décroissante sur un autre.

Définition : tableau de variations

Le **tableau de variations** d'une fonction résume son sens de variation sur chaque intervalle. Une flèche montante (↗) indique que f est croissante, une flèche descendante (↘) qu'elle est décroissante. Les valeurs de $f(x)$ aux extrémités de chaque intervalle sont écrites aux bouts des flèches.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[-1\,;3]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, dont voici la courbe et le tableau de variations.



x	-1		0		2		3
$f(x)$	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

Lecture : f est croissante sur $[-1\,;0]$, décroissante sur $[0\,;2]$ et croissante sur $[2\,;3]$.

2 Extremums d'une fonction

Définition : maximum, minimum, extremum

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- $f(x_0)$ est le **maximum** de f sur I si, pour tout $x \in I$: $f(x) \leqslant f(x_0)$. On dit que le maximum est **atteint en** x_0.
- $f(x_0)$ est le **minimum** de f sur I si, pour tout $x \in I$: $f(x) \geqslant f(x_0)$. On dit que le minimum est **atteint en** x_0.

Un maximum ou un minimum est appelé **extremum**.

Remarque

- Un extremum est une **valeur de** f (une ordonnée), alors que x_0 est l'abscisse où il est atteint.
- Un extremum dépend de l'intervalle I considéré.
- Un extremum peut être atteint en plusieurs valeurs de x.
- Graphiquement, le maximum est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe sur I, le minimum celle du point le plus bas.

Exemple

Avec la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ de l'exemple précédent :

- sur $[-1\,;3]$, le maximum de f est 2, atteint en $x = 0$ *et* en $x = 3$; le minimum est -2, atteint en $x = -1$ *et* en $x = 2$;
- sur $[-1\,;1]$, le maximum est 2 (atteint en 0) et le minimum est -2 (atteint en -1) ;
- sur $[0\,;2]$, f est décroissante : le maximum est $f(0) = 2$ et le minimum est $f(2) = -2$.

Propriété : extremums d'une fonction monotone

Soit f une fonction définie sur $[a\,;b]$.

- Si f est **croissante** sur $[a\,;b]$, son minimum est $f(a)$ et son maximum est $f(b)$.
- Si f est **décroissante** sur $[a\,;b]$, son maximum est $f(a)$ et son minimum est $f(b)$.

Si f n'est pas monotone sur $[a\,;b]$, on découpe l'intervalle en intervalles où f est monotone (à l'aide du tableau de variations) et on compare les valeurs obtenues.

3 Comparer des images

Méthode : comparer $f(a)$ et $f(b)$ sans calculer

Pour deux réels $a < b$ appartenant à un **même intervalle** où f est monotone :

- si f est croissante sur cet intervalle, alors $f(a) \leqslant f(b)$ (l'ordre est conservé) ;
- si f est décroissante sur cet intervalle, alors $f(a) \geqslant f(b)$ (l'ordre est inversé).

Si a et b ne sont pas dans un même intervalle de monotonie, on ne peut pas conclure directement : on calcule les images ou on utilise les extremums.

Exemple

On reprend $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $[-1\,;3]$ (croissante sur $[-1\,;0]$, décroissante sur $[0\,;2]$, croissante sur $[2\,;3]$).

1. Comparer $f(0{,}5)$ et $f(1{,}5)$: $0{,}5 < 1{,}5$ appartiennent à $[0\,;2]$ où f est décroissante, donc $f(0{,}5) > f(1{,}5)$.
2. Comparer $f(2{,}2)$ et $f(2{,}8)$: $2{,}2 < 2{,}8$ appartiennent à $[2\,;3]$ où f est croissante, donc $f(2{,}2) < f(2{,}8)$.
3. Comparer $f(-0{,}5)$ et $f(2{,}5)$: ces deux nombres ne sont pas dans un même intervalle de monotonie ; on calcule directement $f(-0{,}5) = 1{,}125$ et $f(2{,}5) = -1{,}125$, donc $f(-0{,}5) > f(2{,}5)$.

4 Problèmes d'optimisation

Méthode : résoudre un problème d'optimisation

1. Choisir une variable x et préciser les valeurs qu'elle peut prendre (l'ensemble de définition).
2. Exprimer la grandeur à optimiser (aire, volume, coût…) sous la forme d'une fonction $f(x)$.
3. **Conjecturer** le maximum (ou le minimum) à l'aide d'un tableau de valeurs, d'un graphique, de la calculatrice ou d'un programme Python.
4. **Démontrer** la conjecture. Pour un maximum M, on étudie le signe de $M - f(x)$: si on obtient une expression du type $(\ldots)^2 \geqslant 0$, alors $f(x) \leqslant M$ pour tout x, avec égalité pour une valeur de x précise.

Exemple

On dispose de 20 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire. Quelle forme donner à l'enclos pour que son aire soit maximale ?
Notons x la longueur d'un côté, avec $x \in [0\,;10]$; l'autre côté mesure $10 - x$ et l'aire est $A(x) = x(10 - x)$. On conjecture un maximum de 25 pour $x = 5$. Preuve : $25 - A(x) = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 \geqslant 0$, donc $A(x) \leqslant 25$ avec égalité si et seulement si $x = 5$. L'aire est maximale pour un carré de côté 5 m (aire 25 m^2).

Partie B : Exercices

Exercice 1 – Lecture d'un tableau de variations

On donne le tableau de variations d'une fonction g définie sur $[-4\,;6]$.

x	-4		-1		2		6
$g(x)$	-3	↗	5	↘	1	↗	4

a) Donner le sens de variation de g sur chacun des intervalles $[-4\,;-1]$, $[-1\,;2]$ et $[2\,;6]$.

b) Quel est le maximum de g sur $[-4\,;6]$? En quelle valeur de x est-il atteint ? Même question pour le minimum.

c) Comparer, si c'est possible, en justifiant : $g(0)$ et $g(1)$; $g(3)$ et $g(5)$; $g(-3)$ et $g(5)$.

d) Déterminer le minimum de g sur $[-1\,;6]$.

e) Combien de solutions chacune des équations $g(x) = 0$ et $g(x) = 3$ admet-elle sur $[-4\,;6]$?

Exercice 2 – Du tableau à la courbe

On donne le tableau de variations d'une fonction h définie sur $[-3\,;4]$.

x	-3		0		2		4
$h(x)$	3	↘	-1	↗	2	↘	0

a) Donner les extremums de h sur $[-3\,;4]$ et les valeurs en lesquelles ils sont atteints.

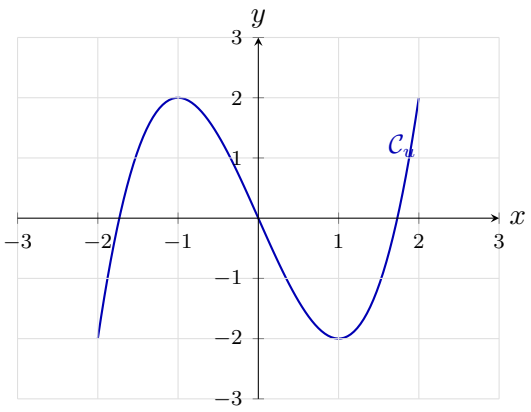
b) Tracer, dans un repère, une courbe possible pour h.

c) Comparer $h(-2)$ et $h(-1)$, puis $h(3)$ et $h(4)$.

d) La courbe de h coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Combien de fois au minimum ?

Exercice 3 – Lecture graphique

On donne la courbe $\mathcal{C}_u$ d'une fonction u définie sur $[-2\,;2]$.



a) Dresser le tableau de variations de u.

b) Donner le maximum et le minimum de u sur $[-2\,;2]$, et les valeurs de x en lesquelles ils sont atteints.

c) Donner le maximum et le minimum de u sur $[0\,;2]$, puis sur $[-2\,;0]$.

d) Combien de solutions l'équation $u(x) = 1$ admet-elle ? Et l'équation $u(x) = 3$?

Exercice 4 – Démonstrations

Démontrer, à l'aide de la définition du sens de variation (on prend deux réels $a < b$ de l'intervalle I et on compare $f(a)$ et $f(b)$) :

a) si une fonction h est croissante sur un intervalle I, alors la fonction $-h$ est décroissante sur I ;

b) si f et g sont deux fonctions croissantes sur I, alors la fonction $f + g$ est croissante sur I ;

c) si f est croissante sur I et k est un réel strictement positif, alors la fonction kf est croissante sur I.

Exercice 5 – Extremums sur un intervalle

On reprend la fonction g de l'exercice 1 (tableau de variations sur $[-4\,;6]$). Déterminer le maximum et le minimum de g, en précisant les valeurs de x où ils sont atteints, sur chacun des intervalles suivants :

a) $[-4\,;-1]$

b) $[-1\,;2]$

c) $[2\,;6]$

d) $[-4\,;2]$

Même question pour la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ du cours, sur les intervalles $[-1\,;1]$ et $[1\,;3]$ (on rappelle que $f(1) = 0$).

Exercice 6 – Vrai ou faux

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse. Justifier (par une démonstration ou un contre-exemple).

a) Si f est croissante sur $[0\,;2]$ et croissante sur $[2\,;5]$, alors f est croissante sur $[0\,;5]$.

b) Si f est décroissante sur I, alors $-f$ est croissante sur I.

c) Le maximum d'une fonction sur un intervalle peut être atteint en deux valeurs différentes de x.

d) Si f est croissante sur $[a\,;b]$, alors le maximum de f sur $[a\,;b]$ est $f(b)$.

e) Si $f(-1) < f(2)$, alors f est croissante sur $[-1\,;2]$.

Exercice 7 – Problème d'optimisation

Un agriculteur dispose de 40 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire adossé à un mur : il ne clôture que **trois côtés** (le mur forme le quatrième côté). On note x la longueur, en mètres, de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur.

a) Quelles valeurs peut prendre x ? Exprimer la longueur du côté parallèle au mur en fonction de x.

b) Montrer que l'aire de l'enclos est $A(x) = x(40 - 2x)$.

c) Compléter un tableau de valeurs de A pour $x = 0$, 5, 10, 15, 20 et conjecturer la valeur de x pour laquelle l'aire semble maximale.

d) Démontrer la conjecture en calculant $200 - A(x)$ et en le mettant sous la forme $2(x-10)^2$.

e) Conclure : quelles sont les dimensions de l'enclos d'aire maximale, et quelle est cette aire ?

Exercice 8 – Programme Python : conjecturer un extremum

Pour conjecturer le maximum d'une fonction sur un intervalle, on peut utiliser une méthode de balayage : on calcule f en des valeurs régulièrement espacées et on retient la plus grande.

```
def A(x):
    return x * (40 - 2 * x)

def balayage_max(f, a, b, n):
    pas = (b - a) / n
    xmax = a
    for i in range(n + 1):
        x = a + i * pas
        if f(x) > f(xmax):
            xmax = x
    return xmax, f(xmax)

print(balayage_max(A, 0, 20, 1000))
```

a) Expliquer le rôle de la variable `xmax` et de la condition `f(x) > f(xmax)`.

b) Exécuter le programme et comparer le résultat avec la conclusion de l'exercice 7.

c) Que renvoie le programme pour `n = 7` ? Pourquoi le résultat est-il moins précis ?

d) Modifier le programme pour qu'il détermine le *minimum* de la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 3$ sur $[0\,;5]$. Quelle valeur obtient-on ?