Fiche 4 – Signe d'une fonction (Seconde)

Partie A : Cours

1 Signe d'une fonction

Définition : fonction positive, négative, zéro

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est **positive** sur I si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$; elle est **strictement positive** si $f(x) > 0$ pour tout $x \in I$.
- f est **négative** sur I si $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$; elle est **strictement négative** si $f(x) < 0$ pour tout $x \in I$.
- Un réel a tel que $f(a) = 0$ est un **zéro** (ou une **racine**) de f.

Étudier le **signe** de f, c'est déterminer pour quelles valeurs de x on a $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ et $f(x) < 0$.

Remarque

Graphiquement, f est positive sur I lorsque la courbe $\mathcal{C}_f$ est **au dessus** (ou sur) l'axe des abscisses, et négative lorsqu'elle est **en dessous** (ou sur) cet axe. Les zéros de f sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

Définition : tableau de signes

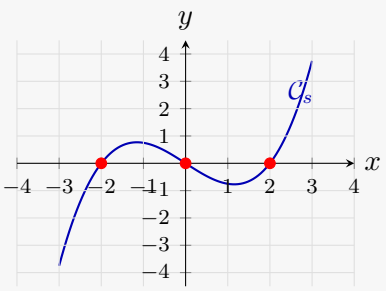
Un **tableau de signes** résume le signe d'une fonction. La première ligne contient les bornes de l'ensemble d'étude et les zéros (rangés dans l'ordre croissant). La deuxième ligne contient le signe $+$ ou $-$ de $f(x)$ sur chaque intervalle, un 0 au niveau de chaque zéro et une **double barre** au niveau de chaque valeur où f n'est pas définie (valeur interdite).

Remarque

Entre deux valeurs « remarquables » consécutives (zéros ou valeurs interdites), le signe d'une fonction reste constant (propriété admise pour les fonctions rencontrées en Seconde).

Exemple

Voici la courbe d'une fonction s définie sur $[-3\,;3]$ et son tableau de signes.



x	-3		-2		0		2		3
$s(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Les zéros de s sont -2, 0 et 2. De plus $s(x) \geqslant 0 \iff x \in [-2\,;0] \cup [2\,;3]$ et $s(x) < 0 \iff x \in [-3\,;-2[\cup]0\,;2[$.

2 Signe et inéquations

Propriété : résoudre une inéquation à l'aide d'un signe

- Résoudre $f(x) > 0$ (resp. $f(x) \geqslant 0$) revient à lire dans le tableau de signes les intervalles où f est strictement positive (resp. positive ou nulle). Même chose pour $f(x) < 0$ et $f(x) \leqslant 0$.
- $f(x) > g(x) \iff f(x) - g(x) > 0$: on étudie le signe de la fonction **différence** $f - g$. Graphiquement, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ lorsque $f - g$ est positive.

Les crochets sont ouverts pour une inégalité stricte, fermés pour une inégalité large (aux zéros seulement) ; une valeur interdite est toujours exclue.

Exemple

Soit f et g deux fonctions définies sur $[-2\,;4]$ dont les courbes se coupent aux points d'abscisses -1 et 2, $\mathcal{C}_f$ étant en dessous de $\mathcal{C}_g$ avant -1, au dessus entre -1 et 2, puis de nouveau en dessous après 2.

x	-2		-1		2		4
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où $f(x) > g(x) \iff x \in]-1\,;2[$ et $f(x) \leqslant g(x) \iff x \in [-2\,;-1] \cup [2\,;4]$.

3 Signe d'un produit et d'un quotient

Propriété : règle des signes

Le signe d'un produit $A(x) \times B(x)$ ou d'un quotient $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ se déduit des signes de $A(x)$ et de $B(x)$:

$A(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$B(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$A(x) \times B(x)$ *ou* $\dfrac{A(x)}{B(x)}$	$+$	$-$	$-$	$+$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Un quotient est nul si et seulement si son **numérateur** est nul (et son dénominateur non nul) ; il n'est pas défini lorsque son dénominateur est nul (**valeur interdite**).

Méthode : construire le tableau de signes d'un produit ou d'un quotient

1. Relever les signes de chaque facteur (à partir de leurs tableaux de signes ou de leurs courbes).
2. Construire un tableau avec **toutes** les valeurs remarquables (les zéros de chaque facteur) rangées dans l'ordre croissant.
3. Recopier, dans une ligne par facteur, les signes de chaque facteur sur chaque intervalle (avec un 0 aux zéros du facteur).
4. Remplir la dernière ligne avec la règle des signes. Pour un quotient, mettre une **double barre** sous les zéros du dénominateur.
5. Lire les solutions de l'inéquation demandée.

Exemple

Soit A et B deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, de signes donnés par :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	

Les valeurs remarquables sont -1, 1 et 3. On construit les tableaux de signes du produit $A \times B$ et du quotient A/B :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$B(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$A(x)B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{A(x)}{B(x)}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc $A(x)B(x) < 0 \iff x \in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;3[$ et $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0 \iff x \in [-1\,;1[\cup [3\,;+\infty[$.

4 Signe, variations et extremums

Propriété : signe déduit d'un extremum ou des variations

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Si le **minimum** de f sur I est positif (resp. strictement positif), alors f est positive (resp. strictement positive) sur I.
- Si le **maximum** de f sur I est négatif (resp. strictement négatif), alors f est négative (resp. strictement négative) sur I.
- Si f est **strictement monotone** sur $[a\,;b]$ avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires, alors f s'annule **exactement une fois** sur $[a\,;b]$ (propriété admise), et son signe change de part et d'autre de ce zéro.

Exemple

Soit h définie sur $[-3\,;4]$ par le tableau de variations ci-dessous, avec $h(-2)=0$ et $h(3)=0$.

x	-3		1		4
$h(x)$	-2	↗	3	↘	-1

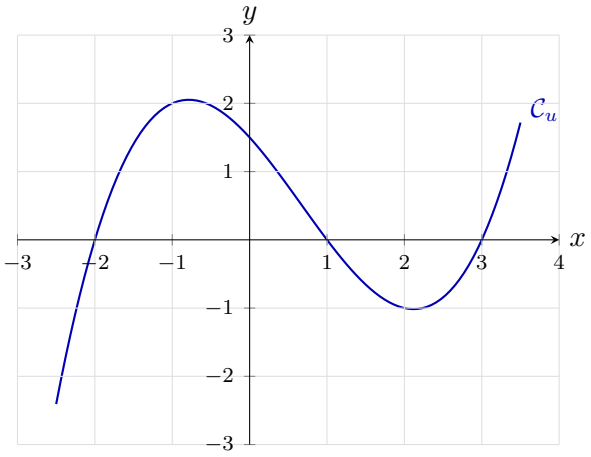
x	-3		-2		1		3		4
$h(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

Sur $[-3\,;1]$, h est strictement croissante de -2 à 3 : elle s'annule une seule fois (en -2), est négative avant et positive après. Sur $[1\,;4]$, h est strictement décroissante de 3 à -1 : elle s'annule une seule fois (en 3), positive avant et négative après.

Partie B : Exercices

Exercice 1 – Lecture graphique

On donne la courbe $\mathcal{C}_u$ d'une fonction u définie sur $[-2{,}5\,;3{,}5]$.



a) Quels sont les zéros de u ?

b) Dresser le tableau de signes de u sur $[-2{,}5\,;3{,}5]$.

c) Résoudre $u(x) \geqslant 0$, puis $u(x) < 0$.

d) u est-elle positive sur $[-2\,;1]$? sur $[1\,;3]$? Justifier.

Exercice 2 – Du tableau de signes aux inéquations

On donne le tableau de signes d'une fonction f définie sur $[-5\,;6]$.

x	-5		-2		1		4		6
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

a) Quels sont les zéros de f ?

b) Résoudre les inéquations $f(x) > 0$, $f(x) \leqslant 0$ et $f(x) \geqslant 0$.

c) Que peut-on dire du signe de $f(0)$? de $f(3)$? de $f(5)$?

d) L'équation $f(x) = 0$ a-t-elle d'autres solutions que celles de la question a) ? Justifier.

e) Peut-on déterminer le signe de $f(x) + 10$ pour tout x de $[-5\,;6]$? Justifier.

Exercice 3 – Produit et quotient

Soit A et B deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont les signes sont donnés par les tableaux suivants.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$B(x)$		$+$	0	$-$	

a) Dresser le tableau de signes du produit $A(x)B(x)$.

b) Résoudre $A(x)B(x) \geqslant 0$.

c) Dresser le tableau de signes du quotient $\dfrac{A(x)}{B(x)}$. Pour quelle valeur de x n'est-il pas défini ?

d) Résoudre $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0$, puis $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0$.

Exercice 4 – Un produit de trois facteurs

On donne les tableaux de signes de trois fonctions P, Q et R définies sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$Q(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$R(x)$		$+$	0	$-$	

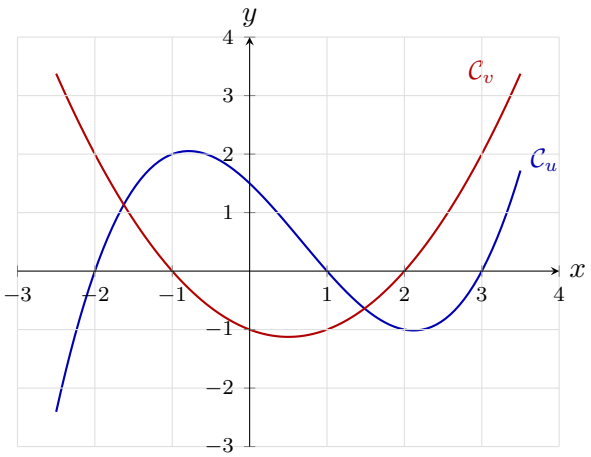
a) Dresser le tableau de signes de $P(x)\,Q(x)\,R(x)$ et résoudre $P(x)\,Q(x)\,R(x) > 0$.

b) Dresser le tableau de signes de $\dfrac{P(x)\,Q(x)}{R(x)}$ et résoudre $\dfrac{P(x)\,Q(x)}{R(x)} > 0$. Comparer avec la question a).

c) Résoudre $\dfrac{P(x)}{Q(x)\,R(x)} \leqslant 0$.

Exercice 5 – Produit de deux courbes

On donne ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_u$ (celle de l'exercice 1) et $\mathcal{C}_v$ de deux fonctions u et v définies sur $[-2{,}5\,;3{,}5]$. Les zéros de v sont -1 et 2.



a) Dresser le tableau de signes de u, puis celui de v.

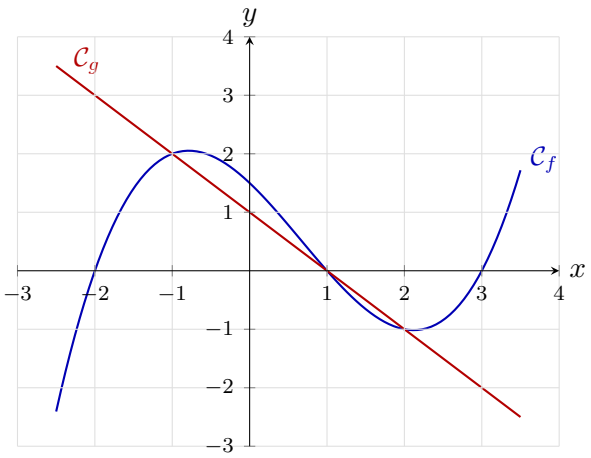
b) En déduire le tableau de signes du produit $u(x)\,v(x)$ sur $[-2{,}5\,;3{,}5]$.

c) Résoudre $u(x)\,v(x) \leqslant 0$.

d) Dresser le tableau de signes du quotient $\dfrac{u(x)}{v(x)}$. Pour quelles valeurs de x n'est-il pas défini ?

Exercice 6 – Comparer deux fonctions

On donne les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g définies sur $[-2{,}5\,;3{,}5]$.



a) Déterminer graphiquement les solutions de $f(x) = g(x)$.

b) Dresser le tableau de signes de la fonction $f - g$ sur $[-2{,}5\,;3{,}5]$.

c) En déduire les solutions de $f(x) > g(x)$ et de $f(x) \leqslant g(x)$.

Exercice 7 – Du tableau de variations au signe

Soit k une fonction définie sur $[-3\,;7]$ par le tableau de variations suivant. On sait que $k(-2)=0$, $k(2)=0$ et $k(6)=0$.

x	-3		0		4		7
$k(x)$	-2	↗	3	↘	-4	↗	1

a) Justifier que k s'annule une seule fois sur chacun des intervalles $[-3\,;0]$, $[0\,;4]$ et $[4\,;7]$.

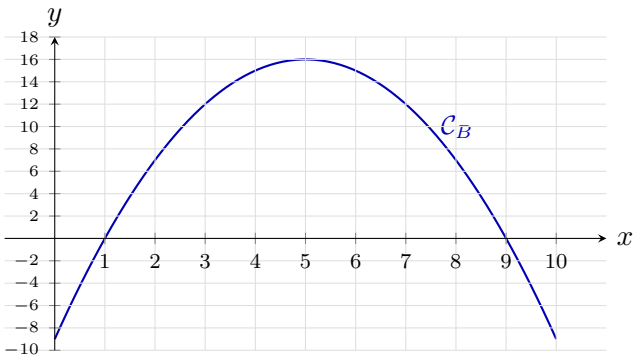
b) Dresser le tableau de signes de k sur $[-3\,;7]$.

c) Résoudre $k(x)>0$ et $k(x)\leqslant 0$.

d) Soit m une fonction définie sur $[0\,;5]$ dont le minimum est 1,5. Que peut-on dire du signe de m sur $[0\,;5]$? Justifier.

Exercice 8 – Problème : bénéfice d'une entreprise

Une entreprise fabrique et vend x centaines d'objets, avec $x\in[0\,;10]$. On note $B(x)$ son bénéfice, en milliers d'euros (un bénéfice négatif est une perte). La courbe de B est donnée ci-dessous.



a) Dresser le tableau de signes de B sur $[0\,;10]$.

b) Pour quelles quantités l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ? une perte ? Interpréter les zéros de B.

c) Résoudre graphiquement $B(x)\geqslant 7$ et interpréter.

d) Quel est le bénéfice maximal et pour quelle quantité est-il atteint ?

Exercice 9 – Vrai ou faux

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse. Justifier (par une démonstration ou un contre-exemple).

a) Si $f(x) > 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors f n'a pas de zéro sur I.

b) Le produit de deux fonctions négatives sur I est négatif sur I.

c) Si f est croissante sur I, alors f est positive sur I.

d) Si f et g sont positives sur I, alors $f + g$ est positive sur I.

e) Si f est positive sur I et g est négative sur I, alors $f + g$ est négative sur I.

f) Le quotient $\dfrac{f}{g}$ est défini en tout réel x où f et g sont définies.

g) Si le minimum de f sur I est strictement positif, alors f est strictement positive sur I.

Exercice 10 – Programme Python : repérer les changements de signe

Pour repérer les zéros d'une fonction où elle change de signe, on peut parcourir l'intervalle avec un petit pas et détecter les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ et $f(x + \text{pas})$ sont de signes contraires.

```
def f(x):
    return (x + 2) * (x - 1) * (x - 3) / 4

def changements_de_signe(f, a, b, pas):
    x = a
    while x < b:
        if f(x) * f(x + pas) <= 0:
            print("changement de signe entre", round(x, 2), "et", round(x + pas, 2))
        x = x + pas

changements_de_signe(f, -2.5, 3.5, 0.01)
```

a) Pourquoi le produit `f(x) * f(x + pas)` est-il négatif ou nul lorsque la fonction change de signe entre `x` et `x + pas` ?

b) Exécuter le programme et comparer les résultats avec les zéros de u obtenus à l'exercice 1.

c) Que se passe-t-il si l'on choisit un pas très grand, par exemple `pas = 3` ?

d) Modifier le programme pour qu'il affiche, pour `x = -2, -1, 0, 1, 2, 3`, le signe de `f(x)` (« positif », « négatif » ou « nul »).