

Exercice 1 – Ensembles de nombres

Compléter les pointillés (pas ceux entre accolades) par le symbole $\subset$, $\supset$, $\in$, $\notin$ ou $=$.

- a) $-15 \dots \mathbb{N}$ c) $\mathbb{N}^* \dots \mathbb{N}$ e) $\{0, 2, 4, \dots\} \dots \mathbb{N}$ g) $\{0, 2, 4, \dots\} \cap \{1, 3, 5, \dots\} \dots \emptyset$
 b) $0 \dots \mathbb{Z}$ d) $\mathbb{Z} \dots \mathbb{N}$ f) $\mathbb{N} \dots \mathbb{Z}^+$ h) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^- \dots \mathbb{Z}$

Remarque. On donne les notations utilisées dans cet exercice et pas encore vues en cours :

$\emptyset$: désigne l'ensemble vide, c'est-à-dire un ensemble qui ne contient aucun élément.

$\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls.

$\mathbb{Z}^- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ désigne l'ensemble des entiers négatifs ou nuls.

$\cap$: désigne l'intersection de deux ensembles.

$\cup$: désigne la réunion (ou union) de deux ensembles.

Exercice 2 – Division euclidienne

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes.

$$437 \div 19, \quad 915 \div 27, \quad 2026 \div 37, \quad 12345 \div 29.$$

Pour chacune, donner le quotient, le reste et l'égalité correspondante.

Exercice 3 – Retrouver une division

Compléter les égalités pour qu'elles correspondent à une division euclidienne.

$$125 = 9 \times \dots + r,$$

$$247 = 13 \times \dots + r,$$

$$100 = 7 \times \dots + r.$$

Préciser toutes les valeurs possibles du reste r ($0 \leq r < \text{diviseur}$), puis déterminer la valeur correspondant aux pointillés.

Exercice 4 – Critères de divisibilité

Sans effectuer de division, déterminer si chacun des nombres suivants est divisible par **2**, **3**, **5**, **9** et **10**.

$$126, 235, 378, 540, 702, 945, 1010, 1234, 1809, 2500, 4321, 9999.$$

Justifier vos réponses en rappelant les critères de divisibilité utilisés.

Exercice 5 – Multiples et diviseurs

Parmi les nombres

24, 36, 42, 54, 60, 72, 81, 90,

déterminer ceux qui sont

- multiples de 3 ;
- multiples de 6 ;
- multiples de 9 ;
- divisibles par 12.

Exercice 6 – Diviseurs

Justifier chacune des affirmations suivantes.

1. $18 \mid 360$.
2. 14 ne divise pas 255.
3. $25 \mid 975$.
4. 11 ne divise pas 500.

Exercice 7 – Démonstration

Soient a et b deux entiers (a non nul).

Montrer que si a divise b , alors a divise $5b$.

Exercice 8 – Démonstration

Soient a , b et c trois multiples de 7.

Montrer que

$$2a - 3b + 5c$$

est encore un multiple de 7.

Exercice 9 – Nombres pairs et impairs

Écrire les nombres suivants sous la forme $2k$ ou $2k + 1$ selon leur parité.

453, 814, 9999, 12006, 202607.

Exercice 10 – Démonstration

Montrer que le carré d'un entier pair est pair.

Exercice 11 – Démonstration

Justifier de la parité du produit de deux entiers consécutifs.

Exercice 12 – Démonstration

Montrer que la somme de trois entiers impairs est impaire.

Exercice 13 – Démonstration

Montrer que le produit de trois entiers consécutifs est divisible par 6.

Exercice 14 – Fractions irréductibles

Parmi les fractions suivantes, lesquelles sont irréductibles ? Simplifier celles qui ne le sont pas.

$$\frac{24}{35}, \quad \frac{16}{2}, \quad \frac{45}{75}, \quad \frac{119}{221}, \quad \frac{84}{126}, \quad \frac{8}{1}, \quad \frac{97}{100}.$$

Justifier vos réponses si nécessaire. Une fraction de dénominateur 1 n'est pas considérée comme une fraction irréductible (cf. cours).

Exercice 15 – Problème

Une association dispose de 857 chaises.

Elle souhaite former des rangées de 24 chaises.

1. Combien de rangées complètes peut-elle former ?
2. Combien restera-t-il de chaises ?
3. Écrire la division euclidienne correspondante.

Exercice 16 – Recherche

Existe-t-il un entier dont la division euclidienne par 9 donne un quotient égal au reste ?

Si oui, donner toutes les possibilités.

Exercice 17 – Recherche

Trouver tous les entiers compris entre 150 et 300 qui sont divisibles par 12 mais pas par 18.

Exercice 18 – Python (division euclidienne)

Écrire un programme Python demandant deux entiers a et b puis indiquant le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b .

Exercice 19 – Python (multiples)

Écrire un programme qui affiche tous les multiples de 17 compris entre 500 et 1000.

Exercice 20 – Défi (division euclidienne)

Trouver tous les entiers n tels que la division euclidienne de n par 8 ait pour quotient 12 et pour reste un nombre pair.

Exercice 21 – Défi (fraction irréductible)

Déterminer toutes les fractions irréductibles

$$\frac{a}{b}$$

telles que

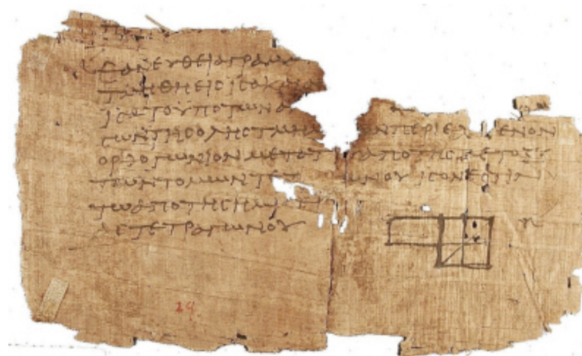
$$a + b = 20, a \text{ et } b \text{ entiers naturels et } b > 1.$$

Exercice 22 – Défi (fraction irréductible)

Déterminer toutes les fractions irréductibles positives et inférieures à 1 dont le dénominateur est 12.

Exercice 23 – Défi (fraction irréductible)

Déterminer toutes les fractions irréductibles comprises entre 0 et $\frac{9}{10}$ dont la différence entre le dénominateur et le numérateur est égale à 2.



Fragment d'une des plus anciennes copies des « Éléments » (environ -100 avant Jésus-Christ)



Euclide (environ -300 av. J.-C.)