Fiche 1 – Généralités sur les fonctions

Classe de Seconde

Partie A : Cours

1 Notion de fonction

Définition : fonction

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ (par exemple un intervalle ou une réunion d'intervalles). Une **fonction** f définie sur D associe à chaque réel x de D **un unique** réel noté $f(x)$.
On note $f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$.

- x est la **variable** ;
- $f(x)$ est l'**image** de x par f ;
- si $y = f(x)$, alors x est **un antécédent** de y par f.

Remarque

Un réel x de D a *une seule* image, mais un réel y peut avoir *zéro, un ou plusieurs* antécédents.

Une fonction peut être donnée par une **expression algébrique** (ex. $f(x) = x^2 - 3x$), un **tableau de valeurs**, une **courbe** ou un **programme de calcul**. En Python, la fonction $f(x) = x^2 - 3x$ s'écrit :

```
def f(x):
    return x**2 - 3*x
```

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x$.

- *Image de* 4 : $f(4) = 16 - 12 = 4$.
- *Antécédents de* -2 : on résout $f(x) = -2$, soit $x^2 - 3x + 2 = 0$, soit $(x-1)(x-2) = 0$. Les antécédents de -2 sont 1 et 2.

2 Ensemble de définition

Définition : ensemble de définition

L'**ensemble de définition** d'une fonction f, noté D_f, est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe (est calculable).

Méthode : déterminer un ensemble de définition

On repère les « interdits » de calcul :

— on ne peut pas diviser par 0 : dans $\dfrac{A}{B}$, il faut $B \neq 0$;

— on ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre négatif : dans $\sqrt{A}$, il faut $A \geqslant 0$.

Exemple

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$: il faut $x \neq 2$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$.
2. $g(x) = \sqrt{3x-6}$: il faut $3x - 6 \geqslant 0$, soit $x \geqslant 2$, donc $D_g = [2\,;+\infty[$.
3. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-3}$: il faut $x \geqslant -1$ et $x \neq 3$, donc $D_h = [-1\,;3[\cup]3\,;+\infty[$.

3 Courbe représentative

Définition : courbe représentative

Dans un repère du plan, la **courbe représentative** $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ dont les coordonnées vérifient $y = f(x)$ avec $x \in D_f$. On dit que $y = f(x)$ est l'**équation** de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Propriété : appartenance à la courbe

Soit $A(x_A\,;y_A)$ un point du plan avec $x_A \in D_f$.

$$A \in \mathcal{C}_f \iff y_A = f(x_A).$$

Exemple

Avec $f(x) = x^2 - 3x$:

— $A(4\,;4) \in \mathcal{C}_f$ car $f(4) = 4$;

— $B(-1\,;2) \notin \mathcal{C}_f$ car $f(-1) = 1 + 3 = 4 \neq 2$;

— le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 3 a pour ordonnée $f(3) = 0$: c'est le point $(3\,;0)$.

Remarque

Lecture graphique. Pour lire l'image de a, on repère l'abscisse a sur l'axe des abscisses, puis on lit l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse a. Les antécédents d'un réel b sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés sur la droite horizontale d'équation $y = b$.

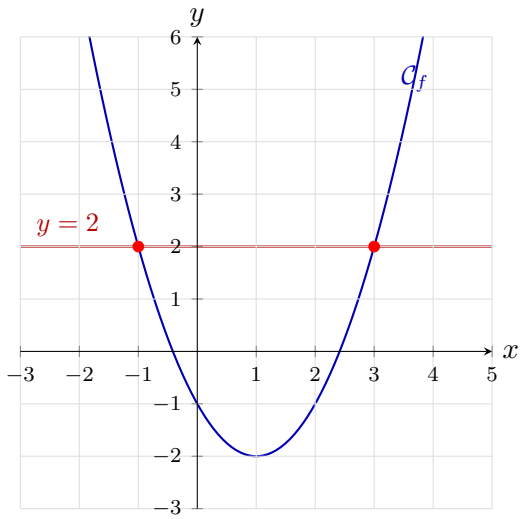
4 Équations et inéquations : résolution graphique

Propriété : lecture graphique

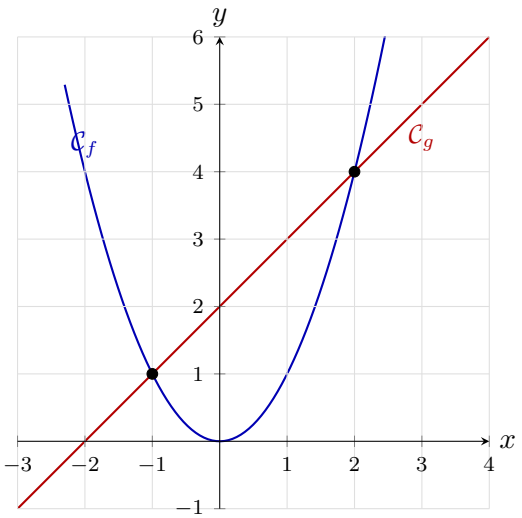
Soit f et g deux fonctions, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes, et k un réel.

- Les solutions de $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'équation $y = k$.
- Les solutions de $f(x) < k$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés **strictement en dessous** de cette droite.
- Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- Les solutions de $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est **strictement en dessous** de $\mathcal{C}_g$.

Même principe pour $>$, $\leqslant$ et $\geqslant$.



$f(x) = x^2 - 2x - 1$: $f(x) = 2 \iff x \in \{-1\,;3\}$ et $f(x) < 2 \iff x \in]-1\,;3[$.



$f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$: $f(x) = g(x) \iff x \in \{-1\,;2\}$ et $f(x) < g(x) \iff x \in]-1\,;2[$.

Remarque

Une lecture graphique ne donne en général que des valeurs approchées. Pour une valeur exacte, on résout algébriquement ; par exemple $f(x) = 2 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff (x+1)(x-3) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 3$.

Partie B : Exercices

Exercice 1 – Images et antécédents

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

a) Calculer les images de 0, 1, -2 et $\dfrac{1}{2}$.

b) Déterminer les antécédents de 1 par f.

c) Déterminer les antécédents de 0 par f (on pourra vérifier que $2x^2-3x+1 = (2x-1)(x-1)$).

Exercice 2 – Vrai ou faux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$. Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.

a) L'image de 2 est 0.

b) -3 est un antécédent de 5.

c) 5 a un unique antécédent par f.

d) 0 a deux antécédents par f.

e) -5 n'a aucun antécédent par f.

Exercice 3 – Programme de calcul

On considère le programme de calcul suivant :

— choisir un nombre x ;

— le multiplier par 3, puis ajouter 1 ;

— élever le résultat au carré ;

— retrancher 4.

On note $f(x)$ le résultat obtenu.

a) Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

b) Calculer $f(1)$ et $f(-2)$.

c) Écrire en Python une fonction `f(x)` qui réalise ce programme de calcul.

d) Déterminer les antécédents de 0 par f.

Exercice 4 – Ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

a) $f_1(x) = \dfrac{1}{x+3}$

b) $f_2(x) = \sqrt{5-x}$

c) $f_3(x) = \dfrac{3x}{x^2-4}$

d) $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-4}$

e) $f_5(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

f) $f_6(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

Exercice 5 – Appartenance à une courbe

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Les points suivants appartiennent-ils à la courbe $\mathcal{C}_f$? Justifier.

$$A(3\,;4), \quad B\left(0\,;\tfrac{1}{2}\right), \quad C(2\,;0), \quad D(-1\,;0), \quad E(5\,;2), \quad F(1\,;2).$$

c) Déterminer l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 4.

Exercice 6 – Calculs de coordonnées

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses (on pourra factoriser $x^2 - 2x - 3$).

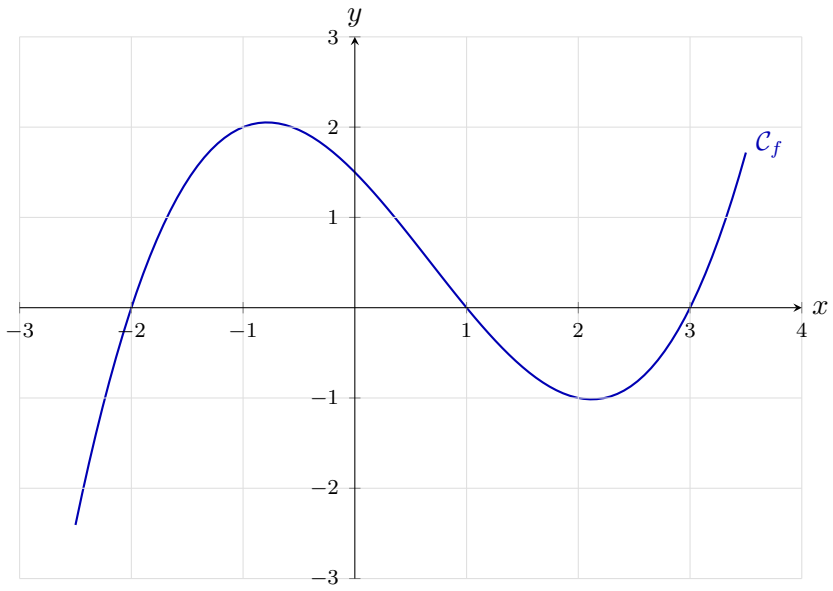
c) Déterminer les coordonnées des points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée 5.

d) Le point $P(2\,;m)$ appartient à $\mathcal{C}_f$. Déterminer m.

e) Le point $Q(a\,;12)$ appartient à $\mathcal{C}_f$. Déterminer les valeurs possibles de a.

Exercice 7 – Lecture graphique

On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[-2{,}5\,;3{,}5]$.



Dans cet exercice, on donnera des valeurs approchées lorsque c'est nécessaire.

a) Lire les images de -1, de 0 et de 2.

b) Lire les antécédents de 0.

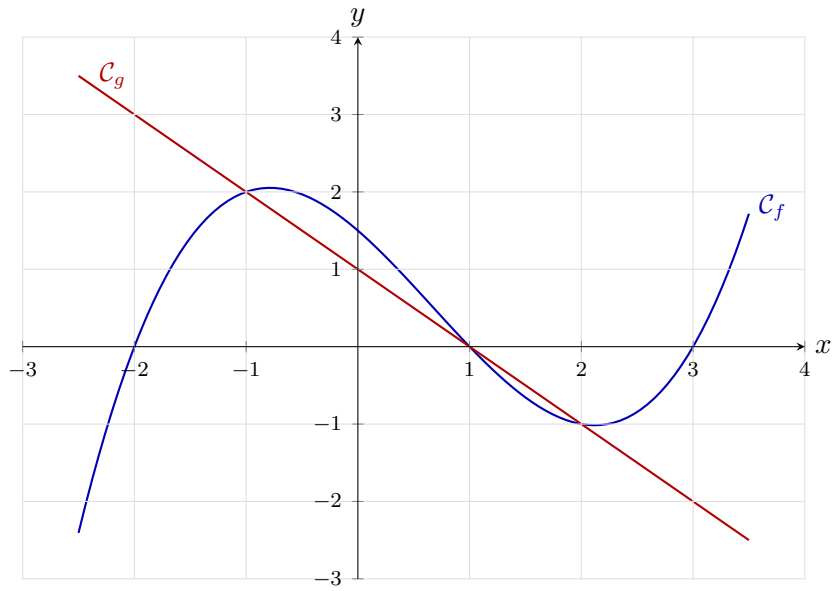
c) Combien le nombre 1 a-t-il d'antécédents ? Donner une valeur approchée de chacun.

d) Résoudre graphiquement $f(x) = 2$.

e) Résoudre graphiquement $f(x) \leqslant 0$.

Exercice 8 – Comparaison de deux courbes

On donne les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g définies sur $[-2{,}5\,;3{,}5]$.



a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$.

c) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.

d) On sait que $g(x) = 1 - x$. Vérifier par le calcul que les solutions lues à la question a) sont bien des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, sachant que $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)(x-3)}{4}$.

Exercice 9 – Modélisation : fabrication d'une boîte

On dispose d'une feuille de carton rectangulaire de 30 cm de long et 20 cm de large. On découpe dans chaque coin un carré de côté x (en cm), puis on replie les bords pour former une boîte sans couvercle (un pavé droit).

a) Quelles valeurs peut prendre x ? En déduire l'ensemble de définition de la fonction V qui à x associe le volume de la boîte.

b) Exprimer les trois dimensions de la boîte en fonction de x, puis montrer que $V(x) = x(30 - 2x)(20 - 2x)$.

c) Calculer $V(2)$ et $V(5)$.

d) Vérifier que 5 est un antécédent de 1000 par V. Que signifie ce résultat pour la boîte ?

e) Écrire en Python une fonction `V(x)` puis un programme qui affiche le volume pour $x = 1, 2, 3, 4, 5$.