

Produit d'un vecteur par un réel

Activité – Multiplier un vecteur par un nombre

On considère un vecteur non nul $\vec{u}$.

1. Multiplier un vecteur par un nombre positif

Construire les vecteurs

$$2\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}, \quad 3\vec{u}, \quad \frac{1}{2}\vec{u}.$$

Observer leurs représentations.

- a) Les vecteurs $\vec{u}$, $2\vec{u}$, $3\vec{u}$ et $\frac{1}{2}\vec{u}$ ont-ils la même direction ?
- b) Ont-ils le même sens ?
- c) Comment évolue leur norme lorsqu'on multiplie $\vec{u}$ par un nombre positif ?

2. Multiplier un vecteur par un nombre négatif

Construire les vecteurs

$$-\vec{u} \text{ (l'opposé du vecteur } \vec{u}), \quad -3\vec{u}, \quad -\frac{2}{3}\vec{u}.$$

- a) Les vecteurs obtenus ont-ils la même direction que $\vec{u}$?
- b) Ont-ils le même sens que $\vec{u}$?
- c) Comment évolue leur norme ?

3. Le cas $k = 0$

Que peut-on dire du vecteur $0 \times \vec{u}$? (passer par la norme)

Cours – Produit d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel.

Le **produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k** , noté $k.\vec{u}$, $k \times \vec{u}$ ou $k\vec{u}$, est le vecteur défini par les propriétés suivantes.

direction

Si $k \neq 0$, les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la **même direction**.

sens

- Si $k > 0$, les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le **même sens**.
- Si $k < 0$, les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont des **sens opposés**.

norme

La norme de $k\vec{u}$ est donnée par

$$\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|.$$

Ainsi, la longueur est multipliée par la valeur absolue de k .

Exemple :

Si $\|\vec{u}\| = 4$ cm, alors

$$\|3\vec{u}\| = 12 \text{ cm}$$

et

$$\|-2\vec{u}\| = 8 \text{ cm}.$$

Le vecteur $-2\vec{u}$ a donc la même direction que $\vec{u}$, le sens opposé et une norme de 8 cm.

Vecteur opposé

Le **vecteur opposé** de $\vec{u}$ est le vecteur

$$-\vec{u} = \vec{u} \times (-1).$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{u}$:

- ont la même direction ;
- ont des sens opposés ;
- ont la même norme.

Et donc $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** s'il existe un réel k tel que

$$\boxed{\vec{v} = k\vec{u}}.$$

Autrement dit, deux vecteurs non nuls sont colinéaires lorsqu'ils ont la **même direction**.

Remarque :

Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à **tous les vecteurs**.

En effet,

$$\vec{0} = 0 \times \vec{u}.$$

Exercice 1 – Vrai ou faux

Dire si chacune des affirmations est vraie ou fausse. Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul on a :

- a) $2\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens.
- b) $-3\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction.
- c) $\| -4\vec{u} \| = \| 4\vec{u} \|$.
- d) $\| -\frac{1}{2}\vec{u} \| = -\frac{1}{2}\| \vec{u} \|$.
- e) $-\vec{u} + \vec{u} = 0$.
- f) Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
- g) Deux vecteurs de même norme sont toujours colinéaires.

Exercice 2 – Calcul de normes

On donne

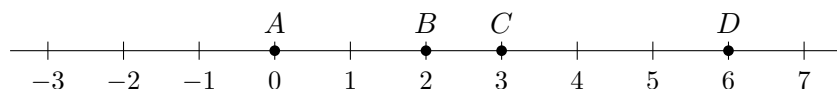
$$\| \vec{u} \| = 6 \text{ cm.}$$

Calculer :

$$\| 2\vec{u} \|, \quad \| -3\vec{u} \|, \quad \left\| \frac{1}{4}\vec{u} \right\|, \quad \left\| -\frac{5}{2}\vec{u} \right\|.$$

Exercice 3 – Points alignés

Sur la droite graduée ci-dessous, les points A , B , C et D sont alignés.



1. Déterminer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont-ils le même sens ou des sens opposés ?
3. Compléter l'égalité

$$\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$$

en déterminant la valeur de k .

4. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

Exercice 4 – À vous de trouver le coefficient

On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que

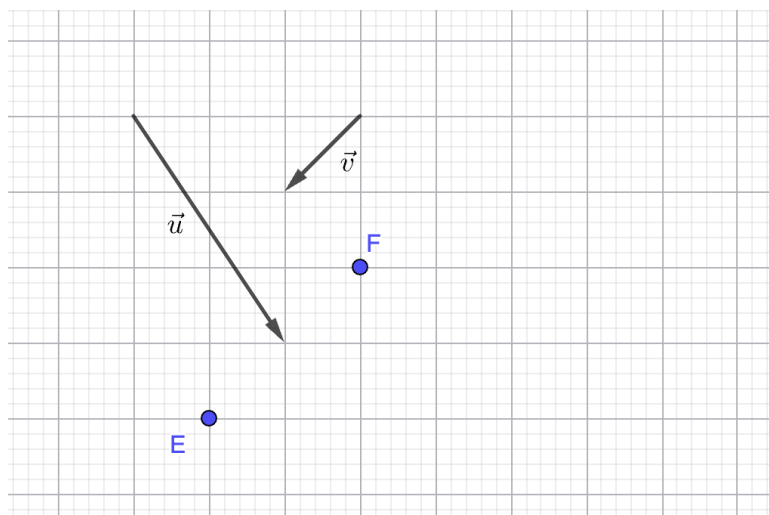
$$\vec{v} = k\vec{u}.$$

Pour chacune des situations suivantes, déterminer k .

1. $\|\vec{u}\| = 3$ cm, $\|\vec{v}\| = 12$ cm, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens.
2. $\|\vec{u}\| = 5$ cm, $\|\vec{v}\| = 15$ cm, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des sens opposés.
3. $\|\vec{u}\| = 8$ cm, $\|\vec{v}\| = 2$ cm, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des sens opposés.

Exercice 5 – Construction

Construire les points M et N , sur le schéma ci-dessous, tels que $\overrightarrow{EM} = -\frac{1}{3}\vec{u}$ et $\overrightarrow{FN} = \frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v}$



À retenir

Pour un réel k et un vecteur $\vec{u}$:

$k > 0 \implies$ même direction et même sens, $k < 0 \implies$ même direction et sens opposé, $\ k\vec{u}\ = k \ \vec{u}\ .$

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si l'un est un "multiple" de l'autre :

$$\boxed{\vec{v} = k\vec{u}} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Enfin,

$$\boxed{\vec{0} \text{ est colinéaire à tout vecteur du plan (ou de l'espace).}}$$

Attention à ne pas confondre 0, le nombre réel, et $\vec{0}$, le vecteur : ce sont deux objets mathématiques différents !