Devoir maison – Nombres complexes

Point de vue algébrique

Chapitre 1 : forme algébrique, conjugué, module, formule du binôme

Consignes. Ce devoir est à rendre à la rentrée des vacances de la Toussaint. Il est à faire **individuellement**, de préférence en plusieurs fois (compter 3 à 4 heures au total). Les résultats doivent être justifiés ; la qualité de la rédaction et la rigueur du raisonnement seront prises en compte. Les exercices sont indépendants, mais l'exercice 5 utilise des résultats de l'exercice 3. Il est conseillé de chercher chaque question quelques minutes avant de regarder les indications.
Barème indicatif : exercice 1 : 3 pts ; exercice 2 : 4 pts ; exercice 3 : 5 pts ; exercice 4 : 4 pts ; exercice 5 : 4 pts. Une question bonus (+1 pt) est proposée à la fin.

Exercice 1 – Calculs et identification

1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$A = \frac{(3+i)^2}{1-i}, \qquad B = \frac{1+2i}{2-i}, \qquad C = 1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2026}.$$

Indication pour C : utiliser la périodicité des puissances de i.

2. Déterminer les réels x et y tels que

$$(1+i)\,x + (2-i)\,y = 5 - i.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1-2i)\,z = 5i$.

Exercice 2 – Équations faisant intervenir z et $\overline{z}$

Partie A. On considère l'équation (E_1) : $2z - 3\overline{z} = 1 + 5i$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Résoudre (E_1) en posant $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et en identifiant parties réelle et imaginaire.
2. Retrouver le résultat à l'aide d'un système d'inconnues z et $\overline{z}$ obtenu en conjuguant (E_1).

Partie B. On considère l'équation (E_2) : $z^2 = \overline{z}$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Écrire (E_2) sous la forme d'un système de deux équations réelles d'inconnues x et y.
2. Montrer que ce système équivaut à $y(2x+1) = 0$ et $x^2 - y^2 = x$, puis résoudre (E_2) dans $\mathbb{C}$ en distinguant les cas $y = 0$ et $x = -\frac{1}{2}$.
3. Montrer que toute solution non nulle z de (E_2) vérifie $z^3 = 1$.

Exercice 3 – Propriétés du module

Dans cet exercice, z et z' désignent deux nombres complexes quelconques. On rappelle que $|z|^2 = z\overline{z}$.

1. **Module d'un produit.**
   a) Montrer que $|zz'|^2 = |z|^2\,|z'|^2$.
   b) En déduire que $|zz'| = |z|\,|z'|$.
2. **Module d'une somme.**
   a) Développer $|z+z'|^2 = (z+z')\,\overline{(z+z')}$ et montrer que

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\,\overline{z'}\right).$$

   b) En déduire l'*identité du parallélogramme* :

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right).$$

3. **Inégalité triangulaire.**
   a) Soit $w = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Re}(w) \leqslant |w|$.
   b) En utilisant les questions précédentes, montrer que $|z + z'|^2 \leqslant (|z| + |z'|)^2$, puis que
   $$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$
4. **Application.** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ et $z \neq -1$. On pose $Z = \dfrac{z-1}{z+1}$.
   a) Montrer que $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.
   b) Montrer que $\overline{Z} = -Z$. Que peut-on en conclure pour Z ?
   c) Vérifier ce résultat avec $z = \dfrac{3+4i}{5}$.

Exercice 4 – Formule du binôme et puissances de $1 + i$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les deux sommes entières

$$R_n = \sum_{\substack{k \text{ tel que} \\ 0 \leqslant 2k \leqslant n}} (-1)^k \binom{n}{2k} \qquad \text{et} \qquad I_n = \sum_{\substack{k \text{ tel que} \\ 0 \leqslant 2k+1 \leqslant n}} (-1)^k \binom{n}{2k+1}.$$

Ainsi, par exemple, $R_n = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots$ et $I_n = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots$.

1. À l'aide de la formule du binôme, développer $(1+i)^4$, puis vérifier le résultat en calculant d'abord $(1+i)^2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Écrire $(1+i)^n$ avec la formule du binôme. En séparant les indices pairs et impairs, et en remarquant que $i^{2k} = (-1)^k$ et $i^{2k+1} = (-1)^k\, i$, montrer que
   $$(1+i)^n = R_n + i\, I_n.$$
   b) En déduire que $R_n = \mathrm{Re}\left((1+i)^n\right)$ et $I_n = \mathrm{Im}\left((1+i)^n\right)$. Montrer que $(1-i)^n = R_n - iI_n$, puis que $(1+i)^n + (1-i)^n = 2R_n$.
3. **Un calcul de grande taille.** On rappelle que la ligne $n = 12$ du triangle de Pascal est
   $$1,\ 12,\ 66,\ 220,\ 495,\ 792,\ 924,\ 792,\ 495,\ 220,\ 66,\ 12,\ 1.$$
   a) Calculer $(1+i)^{12}$ en utilisant $(1+i)^2$.
   b) En déduire les valeurs de R_{12} et I_{12}, puis vérifier ces deux valeurs en effectuant directement les sommes.
4. **Puissances réelles.** Étudier, selon la valeur de l'entier naturel n, la nature de $(1+i)^n$: pour quelles valeurs de n ce nombre est-il réel ? imaginaire pur ? *Indication : on pourra distinguer n pair et n impair, et utiliser* $(1+i)^2 = 2i$.
5. Calculer $(1+i)^{2026}$ sous forme algébrique. En déduire les valeurs de R_{2026} et I_{2026}.

Exercice 5 – Les entiers de Gauss

On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib\ ;\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des *entiers de Gauss*. Pour $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$, on appelle *norme* de z l'entier $N(z) = |z|^2 = a^2 + b^2$.

1. Montrer que si z et z' appartiennent à $\mathbb{Z}[i]$, alors $z + z'$, zz' et $\overline{z}$ appartiennent également à $\mathbb{Z}[i]$.
2. Montrer que $N(z) \in \mathbb{N}$ pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, et que $N(zz') = N(z)\, N(z')$ (on pourra utiliser l'exercice 3).

3. On dit qu'un entier de Gauss $z \neq 0$ est *inversible dans* $\mathbb{Z}[i]$ si $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{Z}[i]$.
   a) Montrer que si z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$, alors $N(z) = 1$. *Indication : considérer* $N(z) \times N\left(\frac{1}{z}\right)$.
   b) Réciproquement, montrer que si $N(z) = 1$, alors z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$.
   c) Déterminer tous les entiers de Gauss inversibles dans $\mathbb{Z}[i]$.
4. **Une identité célèbre.** Soient a, b, c, d quatre entiers relatifs. En considérant la norme du produit $(a + ib)(c + id)$, démontrer que
$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$
5. Écrire $65 = 5 \times 13$ de **deux** façons différentes comme somme de deux carrés d'entiers positifs. *Indication :* $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, *et considérer* $(1 + 2i)(2 + 3i)$ *puis* $(1 + 2i)(2 - 3i)$.
6. Sachant que $1013 = 22^2 + 23^2$, écrire 2026 comme somme de deux carrés d'entiers. *Indication :* $2 = 1^2 + 1^2$.

Question bonus (+1 pt)

Montrer que 2027 n'est pas la somme de deux carrés d'entiers. *Indication : on pourra raisonner modulo 4 en considérant les restes possibles d'un carré dans la division euclidienne par 4.*