

Devoir Surveillé - 19 Janvier 2026

Terminale Maths Expertes

Problème sur les nombres premiers

Étant donné un nombre premier p , on cherche les entiers relatifs k tels que

$\sqrt{k^2 - pk}$ soit un nombre entier.

Question préliminaire :

0. Montrer que cette recherche revient à résoudre l'équation d'inconnue $k \in \mathbb{Z}$

$$(E_p) \quad k^2 - pk = m^2,$$

où m est un entier naturel.

Partie A – Cas particulier $p = 2$

1. Écrire l'équation (E_p) dans le cas $p = 2$.
2. Montrer que cette équation équivaut à

$$(k - 1 - m)(k - 1 + m) = 1$$

3. En déduire les valeurs de k en précisant les possibilités pour avoir un produit de 2 entiers égal à 1.

Partie B – Cas particulier $p = 3$

4. Écrire l'équation (E_p) dans le cas $p = 3$.
5. Montrer que l'équation peut s'écrire sous la forme

$$(2k - 3)^2 - 4m^2 = 9.$$

6. En factorisant l'expression précédente et en remarquant que les seuls diviseurs de 9 sont 1, -1, 3, -3, 9 et -9, déterminer toutes les solutions entières (k, m) de l'équation (E_3) .
7. En déduire l'ensemble des entiers k tels que

$$\sqrt{k^2 - 3k} \in \mathbb{N}.$$

Partie C – Cas général : p nombre premier impair

8. Montrer que l'équation (E_p) est équivalente à

$$(2k - p)^2 - 4m^2 = p^2.$$

9. En factorisant, montrer que

$$(2k - p - 2m)(2k - p + 2m) = p^2.$$

10. En utilisant le fait que p est premier, déterminer toutes les possibilités pour les facteurs précédents.

11. Montrer que, pour tout nombre premier impair p , il existe au plus quatre valeurs entières de k vérifiant

$$\sqrt{k^2 - pk} \in \mathbb{N}.$$

12. Donner ces valeurs de k en fonction de p .

Partie D – Synthèse

13. Récapituler les résultats obtenus pour $p = 2$ et pour p premier impair.

14. Vérifier le résultat obtenu dans le cas $p = 5$.

=====

Problème sur les nombres complexes

On considère la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16.$$

1) Factorisation

On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b).$$

Déterminer les réels a et b .

2) Résolution

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

3) Géométrie dans le plan complexe

On note A, B, C, D les points du plan complexe d'affixes respectives les quatre solutions de l'équation de la question précédente (dans un ordre quelconque).

3.a) Coordonnées cartésiennes

Donner les coordonnées cartésiennes des points A, B, C et D .

3.b) Cocyclicité

On admet les résultats suivants :

- Les points A, B, C, D sont cocycliques (c'est-à-dire appartiennent à un même cercle) si et seulement si

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi}.$$

- On a

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \arg\left(\frac{a-b}{a-c}\right) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}) = \arg\left(\frac{d-b}{d-c}\right),$$

où a, b, c, d désignent les affixes respectives des points A, B, C, D .

- Pour démontrer l'égalité des deux angles orientés modulo π , il suffit de démontrer que le nombre complexe

$$\frac{(a-b)(d-c)}{(a-c)(d-b)}$$

est un nombre réel.

- i) **Donner** l'argument d'un réel strictement positif, puis d'un réel strictement négatif.
- ii) **Calculer** le nombre complexe

$$\frac{(a-b)(d-c)}{(a-c)(d-b)}$$

- iii) **Conclure** quant à la cocyclicité des points A, B, C, D .

3.c)

On considère le point Ω d'affixe $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- i) **Calculer** les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}$ et $\overrightarrow{\Omega D}$.
- ii) **Déterminer** les modules des quatre affixes précédents.
- iii) **Que peut-on en déduire**, que représente le point Ω ?

3.d) Question indépendante

Proposer une construction géométrique du centre du cercle circonscrit à un triangle (cercle passant par les 3 sommets).