Nombres complexes : point de vue géométrique

Cours – Terminale, option mathématiques expertes

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$. On rappelle que tout nombre complexe z s'écrit de façon unique $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$; on note $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$ et $\overline{z} = a - ib$ son conjugué.

1 Représentation d'un nombre complexe

1.1 Affixe d'un point, d'un vecteur

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

Définition Image, affixe d'un point

- À tout nombre complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$ est associé le point M du plan de coordonnées $(a\,;\,b)$, appelé *image* de z et noté $M(z)$.
- À tout point M du plan de coordonnées $(a\,;\,b)$ est associé le complexe $z_M = a+b\mathrm{i}$, appelé *affixe* du point M.

Mais puisque les coordonnées d'un point M dans un repère sont aussi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$, on peut également parler de l'affixe d'un vecteur dans un repère.

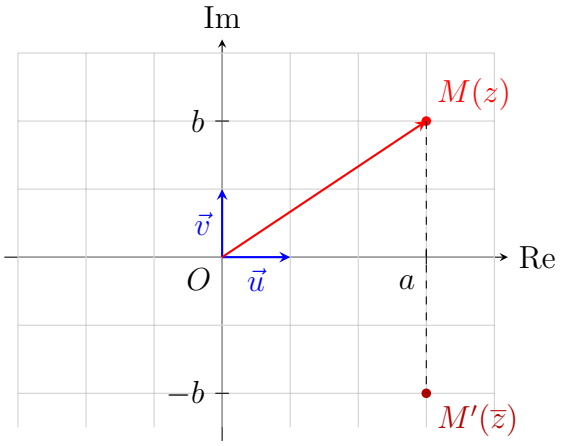
Définition Image, affixe d'un vecteur

- À tout nombre complexe $z = a + ib$ est associé le vecteur $\vec{w}$ du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- À tout vecteur $\vec{w}$ du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est associé le complexe $z = a+b\mathrm{i}$, appelé *affixe* du vecteur $\vec{w}$.

Le plan muni du repère $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$, dans lequel on représente les nombres complexes, est appelé *plan complexe*. L'axe des abscisses est appelé *axe réel* et l'axe des ordonnées est appelé *axe imaginaire pur*.

Exemple

Le point A d'affixe $z_A = 3 + 2\mathrm{i}$ a pour coordonnées $(3\,;\,2)$. Le point $B(-1 - \mathrm{i})$ a pour coordonnées $(-1\,;\,-1)$. Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses, les imaginaires purs ceux des points de l'axe des ordonnées.



1.2 Image du conjugué

Propriété

Soit M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $\overline{z}$. Alors M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Démonstration

Si $z = a + ib$, alors $M(a\,;\,b)$ et $\overline{z} = a - ib$ donc $M'(a\,;\,-b)$, ce qui est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

1.3 Affixe d'un vecteur, calculs avec les affixes

Propriété

Soient $\vec{w}(z)$ et $\vec{w}'(z')$ deux vecteurs et $k \in \mathbb{R}$. Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points.

1. Le vecteur $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affixe $z + z'$; le vecteur $k\vec{w}$ a pour affixe kz.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
3. Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Démonstration

Ces résultats découlent directement des formules sur les coordonnées. Par exemple, si $z_A = x_A + y_A\mathrm{i}$ et $z_B = x_B + y_B\mathrm{i}$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, dont l'affixe est $(x_B - x_A) + (y_B - y_A)\mathrm{i} = z_B - z_A$.

Exemple

Soient $A(1+2\mathrm{i})$, $B(4+3\mathrm{i})$ et $C(2-\mathrm{i})$. Déterminons l'affixe du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.
$ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, c'est-à-dire $z_B - z_A = z_D - z_C$. Donc

$$z_D = z_C + z_B - z_A = (2-\mathrm{i}) + (3+\mathrm{i}) = 5.$$

2 Module d'un nombre complexe

2.1 Définition et interprétation géométrique

Définition

Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Le *module* de z, noté $|z|$, est le nombre réel positif

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Propriété (interprétation géométrique)

- Si M est le point d'affixe z, alors $|z| = OM$. Si $\vec{w}$ est un vecteur d'affixe z, alors $|z| = \|\vec{w}\|$.
- Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points, alors $AB = |z_B - z_A|$.

Démonstration

Dans un repère orthonormé, $OM = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. De plus, $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$ et $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, d'où $AB = |z_B - z_A|$.

Remarque

Si z est réel, $|z|$ est la valeur absolue de z : les deux notions coïncident. On a $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$, et $|\overline{z}| = |-z| = |z|$.

Exemple

$|3-4\mathrm{i}| = \sqrt{9+16} = 5$. Le point $A(1+\mathrm{i})$ et le point $B(4+5\mathrm{i})$ vérifient $AB = |3+4\mathrm{i}| = 5$. L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - (1+2\mathrm{i})| = 3$ est le cercle de centre $\Omega(1+2\mathrm{i})$ et de rayon 3.

2.2 La relation $|z|^2 = z\overline{z}$

Théorème

Pour tout nombre complexe z, $|z|^2 = z\,\overline{z}$.

Démonstration

Soit $z = a + ib$. Alors

$$z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Remarque

Cette relation permet de retrouver le calcul de l'inverse : si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

2.3 Module d'un produit, d'un inverse, d'un quotient, d'une puissance

Théorème

Soient z et z' deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}$.

1. $|zz'| = |z|\,|z'|$.
2. $|z^n| = |z|^n$.
3. Si $z \neq 0$: $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et, plus généralement, si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Démonstration

1. Les modules étant positifs, il suffit de comparer les carrés. D'après $|w|^2 = w\overline{w}$ et la compatibilité du conjugué avec le produit ($\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$) :

$$|zz'|^2 = (zz')\,\overline{zz'} = zz'\overline{z}\,\overline{z'} = (z\overline{z})(z'\overline{z'}) = |z|^2|z'|^2.$$

   Comme $|zz'|$ et $|z|\,|z'|$ sont des réels positifs de même carré, ils sont égaux.

2. Par récurrence sur n. Pour $n = 0$, $|z^0| = |1| = 1 = |z|^0$. Si $|z^n| = |z|^n$ pour un entier n, alors d'après le point 1,

$$|z^{n+1}| = |z^n \cdot z| = |z^n|\,|z| = |z|^n|z| = |z|^{n+1}.$$

3. Si $z \neq 0$, d'après le point 1, $\left|z \cdot \dfrac{1}{z}\right| = |1| = 1$ donc $|z|\left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$, d'où $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$. Pour le quotient : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \left|z \cdot \dfrac{1}{z'}\right| = |z| \cdot \dfrac{1}{|z'|}$.

Exemple

$|(1+\mathrm{i})^{10}| = |1+\mathrm{i}|^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10} = 2^5 = 32.$

Remarque

Attention : en général $|z+z'| \neq |z| + |z'|$. On a seulement l'inégalité triangulaire (voir la section 6).

3 L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Définition

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| = 1\}.$$

Dans le plan complexe, $\mathbb{U}$ est l'ensemble des points du *cercle trigonométrique* (cercle de centre O et de rayon 1).

Exemple

1, -1, i, $-\mathrm{i}$ et $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ appartiennent à $\mathbb{U}$. En effet, $\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$.

Propriété (stabilité de $\mathbb{U}$)

1. Si z et z' appartiennent à $\mathbb{U}$, alors $zz' \in \mathbb{U}$.
2. Si $z \in \mathbb{U}$, alors $z \neq 0$ et $\dfrac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U}$.

Démonstration

1. $|zz'| = |z||z'| = 1 \times 1 = 1$.
2. $|z| = 1$ donc $z \neq 0$, et $z\overline{z} = |z|^2 = 1$, donc $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$. De plus $|\overline{z}| = |z| = 1$, d'où $\overline{z} \in \mathbb{U}$.

Remarque

Plus généralement, si $z \neq 0$, le nombre $\dfrac{z}{|z|}$ appartient à $\mathbb{U}$: en effet, $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = \dfrac{|z|}{|z|} = 1$.
Cette remarque est le point de départ de la forme trigonométrique.

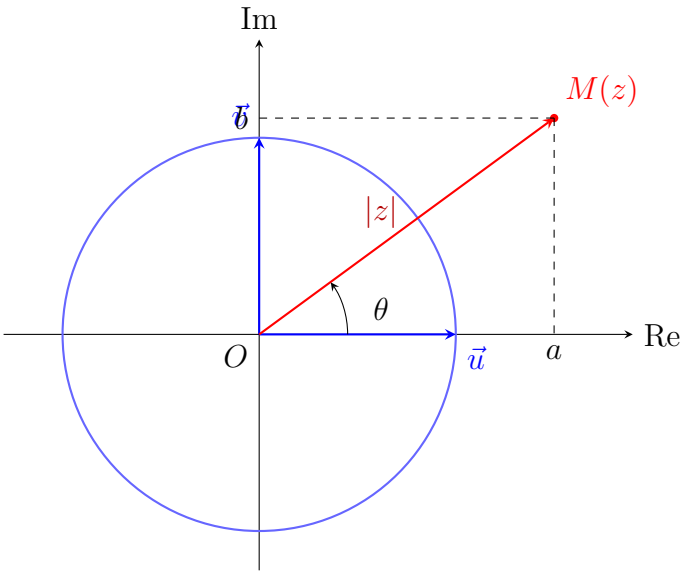
4 Arguments d'un nombre complexe non nul

4.1 Définition

On note $\vec{u}$ le premier vecteur de la base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v})$ du repère.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul, et M le point d'affixe z. On appelle *argument* de z toute mesure, en radians, de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$. On note $\arg(z)$ l'un de ces arguments.
Un argument est défini à 2π près : si θ est un argument de z, les autres arguments sont les réels $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On écrit $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$.



Remarque

Le nombre 0 n'a pas d'argument : l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ n'est pas défini lorsque $M = O$.

4.2 Détermination du module et d'un argument

Propriété

Soit $z = a + bi \neq 0$, de module $r = |z|$ et d'argument θ. Alors

$$\cos\theta = \frac{a}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{r} \qquad \text{soit} \qquad a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta.$$

Démonstration

Le point $M(a\,;\,b)$ est tel que $OM = r$, et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ fait avec $\vec{u}$ l'angle orienté de

mesure θ. Le point $\frac{1}{r}\overrightarrow{OM}$ de coordonnées $\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)$ est donc sur le cercle trigonométrique, et ses coordonnées sont $(\cos\theta\,;\sin\theta)$ par définition du cosinus et du sinus.

Méthode : déterminer le module et un argument de $z = a + b\mathrm{i}$

1. On calcule le module $r = \sqrt{a^2+b^2}$.
2. On cherche θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$ (on reconnaît en général un angle usuel).

Exemple

— $z = 1+\mathrm{i}$: $|z| = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

— $z = -\sqrt{3}+\mathrm{i}$: $|z| = \sqrt{3+1} = 2$, $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ donc $\theta = \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

— $z = -2\mathrm{i}$: $|z| = 2$, $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = -1$ donc $\theta = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Propriété (cas particuliers et conjugué)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

1. z est un réel strictement positif $\iff \arg(z) = 0\ [2\pi]$; z est un réel strictement négatif $\iff \arg(z) = \pi\ [2\pi]$.
2. z est un imaginaire pur $\iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
3. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$ et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$.

Démonstration

Les points 1 et 2 se lisent sur le plan complexe : le point $M(z)$ est sur la demi-droite $[Ox)$ (resp. sur la demi-droite opposée, sur l'axe des ordonnées) dans les cas indiqués. Pour le point 3, le point $M'(\overline{z})$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses, donc $OM' = OM$ et l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'})$ est l'opposé de $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. Le point $M''(-z)$ est le symétrique de M par rapport à O, donc les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont opposés, ce qui ajoute π à l'angle.

5 Forme trigonométrique

Définition

Soit z un nombre complexe non nul, de module r et d'argument θ. L'écriture

$$z = r\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$$

est appelée *forme trigonométrique* de z.

Remarque

D'après la propriété précédente, $z = a + b\mathrm{i} = r\cos\theta + \mathrm{i}\,r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$. L'écriture $a + b\mathrm{i}$ est la *forme algébrique* de z.

Propriété (unicité)

Soit $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, alors $|z| = r$ et θ est un argument de z. Ainsi, deux nombres complexes non nuls $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$ sont égaux si et seulement si $r = r'$ et $\theta = \theta'$ $[2\pi]$.

Démonstration

$|z|^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$ et $r > 0$, donc $|z| = r$. Alors $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{r}$, ce qui montre que θ est un argument de z.

Méthode : passer d'une forme à l'autre

- *Algébrique* $\to$ *trigonométrique* : on calcule $r = |z|$, puis θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$.
- *Trigonométrique* $\to$ *algébrique* : on calcule $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.

Exemple

- $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.
- $z = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 4\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

Remarque

Attention : l'écriture $-2\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$ n'est *pas* une forme trigonométrique, car le coefficient -2 n'est pas positif. On écrit alors $-2(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = 2\left(\cos(\theta + \pi) + \mathrm{i}\sin(\theta + \pi)\right)$.

6 Quelques problèmes

6.1 Inégalité triangulaire

Théorème (inégalité triangulaire)

Pour tous nombres complexes z et z' : $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$.
De plus, il y a égalité si et seulement si $z = 0$ ou s'il existe un réel $\lambda \geqslant 0$ tel que $z' = \lambda z$ (c'est-à-dire si z et z' ont des images « alignées dans le même sens » avec O).

Démonstration

Les deux membres sont positifs ; comparons leurs carrés. On a

$$|z+z'|^2 = (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right) = |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + \overline{z}z' = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right).$$

Or $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant \left|z\overline{z'}\right| = |z||z'|$, donc

$$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = \left(|z| + |z'|\right)^2,$$

d'où l'inégalité.
Cas d'égalité. Si $z = 0$ l'égalité est vérifiée. Si $z \neq 0$, l'égalité équivaut à $\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = \left|z\overline{z'}\right|$, c'est-à-dire que $z\overline{z'}$ est un réel positif. Dans ce cas, posons $\lambda = \dfrac{z'}{z}$, soit $z' = \lambda z$; alors $z\overline{z'} = z\,\overline{\lambda}\,\overline{z} = \overline{\lambda}\,|z|^2$, qui est un réel positif si et seulement si $\overline{\lambda}$, donc λ, est un réel positif.

Remarque

Géométriquement, pour trois points O, $A(z)$, $B(z+z')$, l'inégalité signifie $OB \leqslant OA + AB$: c'est l'inégalité triangulaire usuelle, avec égalité lorsque A appartient au segment $[OB]$.

6.2 Suites de nombres complexes $z_{n+1} = az_n + b$

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = az_n + b$ où $a \neq 1$ et b sont des complexes.

Méthode

1. On cherche le *point fixe* ω de $z \mapsto az + b$, c'est-à-dire la solution de $\omega = a\omega + b$: $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.
2. On pose $w_n = z_n - \omega$. Alors $w_{n+1} = z_{n+1} - \omega = az_n + b - (a\omega + b) = a\,w_n$: la suite (w_n) est géométrique de raison a.
3. On en déduit $w_n = a^n w_0$, d'où $z_n = \omega + a^n(z_0 - \omega)$, et, en passant au module, $|z_n - \omega| = |a|^n\,|z_0 - \omega|$.

Propriété (comportement du module)

Avec les notations précédentes, $|z_n - \omega| = |a|^n |z_0 - \omega|$. Ainsi, géométriquement, la distance ΩM_n entre $M_n(z_n)$ et le point fixe $\Omega(\omega)$:

- tend vers 0 si $|a| < 1$ (les points M_n se rapprochent de Ω) ;
- est constante si $|a| = 1$ (les points M_n sont sur le cercle de centre Ω et de rayon ΩM_0) ;
- tend vers $+\infty$ si $|a| > 1$ et $z_0 \neq \omega$.

Exemple

Soit (z_n) définie par $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n + 1$. Ici $a = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ et $b = 1$.

Le point fixe est $\omega = \dfrac{1}{1 - \frac{1+\mathrm{i}}{2}} = \dfrac{2}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{2(1+\mathrm{i})}{2} = 1 + \mathrm{i}$. Alors $|a| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$ et

$$|z_n - \omega| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |1 - (1+\mathrm{i})| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Les points M_n se rapprochent donc du point $\Omega(1+\mathrm{i})$.

6.3 Pour aller plus loin : ensembles de Mandelbrot et de Julia

Soit $c \in \mathbb{C}$ et la suite définie par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$. L'*ensemble de Mandelbrot* est l'ensemble des points $C(c)$ du plan complexe pour lesquels la suite $(|z_n|)$ reste bornée. On montre que si $|z_n| > 2$ pour un certain rang n (et $|c| \leqslant 2$), alors la suite tend vers $+\infty$ en module : cela donne un critère pour programmer une étude expérimentale (par exemple en Python, en testant si $|z_n|$ dépasse 2 avant un nombre maximal d'itérations).

Les *ensembles de Julia* J_c s'étudient avec la même relation de récurrence, mais en fixant c et en faisant varier le premier terme z_0.

À retenir.

- $M(a+ib)$: $z = a + b\mathrm{i}$ est l'affixe de M ; $\overline{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à (Ox) ; $z_B - z_A$ est l'affixe de $\overrightarrow{AB}$.
- $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = OM$; $AB = |z_B - z_A|$; $|z|^2 = z\overline{z}$.
- $|zz'| = |z||z'|$; $|z^n| = |z|^n$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
- $\mathbb{U}$ = nombres complexes de module 1 : stable par produit et inverse ($\frac{1}{z} = \overline{z}$).
- Argument : $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$; forme trigonométrique $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r = |z| > 0$.