

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Divisibilité — Division euclidienne

Terminale • Option Mathématiques expertes

Dans tout ce document, $a, b, c, \dots$ désignent des entiers relatifs.

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition 1: Diviseur, multiple

Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que **a divise b** (ou que a est un **diviseur** de b , ou encore que b est un **multiple** de a) lorsqu'il existe un entier relatif k tel que

$$b = ka.$$

On note alors $a \mid b$. Ainsi :

$$a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad b = ka.$$

Remarque — cas particuliers à connaître

- Pour tout $a \in \mathbb{Z} : a \mid 0$ (prendre $k = 0$).
- 0 ne divise que lui-même : $0 \mid b \Rightarrow b = 0$.
- 1 et -1 divisent tout entier relatif.

Propriété 1: Règles de calcul

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

- (i) $a \mid a$ (*car* $a = 1 \times a$)
- (ii) Si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$. (*transitivité*)
- (iii) Si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors pour tous $u, v \in \mathbb{Z} : a \mid (ub + vc)$.
En particulier, $a \mid (b + c)$ et $a \mid (b - c)$.
- (iv) Si $a \mid b$, alors pour tout $c \in \mathbb{Z} : a \mid bc$.
- (v) Si $a \mid b$ et $b \neq 0$, alors $|a| \leq |b|$.
Un entier non nul n'a donc qu'un nombre fini de diviseurs.
- (vi) $(a \mid b \text{ et } b \mid a) \Rightarrow b = a \text{ ou } b = -a$.

1.1 Critères de divisibilité

Les critères suivants permettent de déterminer rapidement si un entier est divisible par certains nombres.

Propriété 2: Critères de divisibilité

Pour un entier naturel n :

- **Divisibilité par 2** : n est divisible par 2 si et seulement si son chiffre des unités est pair, c'est-à-dire 0, 2, 4, 6 ou 8.
- **Divisibilité par 3** : n est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- **Divisibilité par 4** : n est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
- **Divisibilité par 5** : n est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- **Divisibilité par 6** : n est divisible par 6 si et seulement si n est divisible à la fois par 2 et par 3.
- **Divisibilité par 8** : n est divisible par 8 si et seulement si, le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.
- **Divisibilité par 9** : n est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- **Divisibilité par 10** : n est divisible par 10 si et seulement si son chiffre des unités est 0.

2 Division euclidienne d'un élément de $\mathbb{Z}$ par un élément de $\mathbb{Z}^*$

Depuis le collège, vous savez effectuer la division euclidienne d'un entier *naturel* par un entier naturel non nul. On généralise ici cette notion à un dividende a quelconque dans $\mathbb{Z}$ (éventuellement négatif) et à un diviseur b quelconque dans $\mathbb{Z}^*$.

Théorème 1: Existence et unicité de la division euclidienne

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Il existe un **unique** couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < |b|.$$

L'entier q est appelé le **quotient** et r le **reste** de la division euclidienne de a par b (a est le *dividende*, b le *diviseur*).

Remarque

$r = 0 \iff b \mid a$: le reste est nul si et seulement si le diviseur b divise le dividende a .