

Exercice 1 – Forme algébrique

Pour chacun des nombres complexes suivants, donner sa partie réelle, sa partie imaginaire et préciser s'il est réel, imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.

$$z_1 = 3 - 2i, \quad z_2 = -5, \quad z_3 = 7i, \quad z_4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i, \quad z_5 = 0.$$

Exercice 2 – Principe d'identification

Déterminer les réels x et y tels que :

$$\text{a) } 3x + 2 - i(4y - 1) = 8 + 7i \quad \text{b) } 2x - y + i(x + 3y) = 5 - i$$

Exercice 3 – Calculs

Calculer sous forme algébrique.

- a) $(2 - 3i) + (5 + 7i)$
- b) $(4 + i) - (3 - 5i)$
- c) $(3 + 2i)(1 - 4i)$
- d) $(-2 + i)^2$

Exercice 4 – Puissances de i

Calculer

$$i^{17}, \quad i^{28}, \quad i^{103}, \quad i^{2026}, \quad i^{3n+1} \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 5

Calculer (forme algébrique) le conjugué de chacun des nombres suivants.

$$z_1 = 4 - 7i, \quad z_2 = (2 + i)(3 - 5i), \quad z_3 = (1 - 2i)^3.$$

Exercice 6

Calculer $z\bar{z}$ pour

$$z_1 = 3 - 4i, \quad z_2 = 5 + 12i, \quad z_3 = -2 + i.$$

En déduire leur module.

Exercice 7

Écrire sous forme algébrique.

$$z_1 = \frac{2+i}{3-2i}, \quad z_2 = \frac{5-3i}{1+i}, \quad z_3 = \frac{(5-3i)^2}{i}, \quad z_4 = \frac{-4+i}{2+3i}, \quad z_5 = \frac{-x}{x+iy} \text{ où } x, y \in \mathbb{R} \text{ vérifient } x^2 + y^2 = 1$$

Exercice 8

Déterminer la forme algébrique de l'inverse des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2 + i, \quad z_2 = -3 + 4i, \quad z_3 = -5i, \quad z_4 = -x - iy \text{ où } x, y \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$.

$$\text{a) } (2 - 3i)z = 7 + i \quad \text{b) } (1 + i)z + i = 2 - 5i \quad \text{c) } \frac{2 - i}{z} = 2i - 1.$$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$.

$$\text{a) } 2z - \bar{z} = 4 + 3i \quad \text{b) } z + \bar{z} = 8 \quad \text{c) } z + \bar{z} = 2i$$

Pour la première équation, on devra utiliser les deux méthodes du cours.

Exercice 11

Développer et réduire.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } (z + 1 - i)^2 & \text{b) } (2 - i)^5 & \text{c) } (z - 1 + 2i)^3 \\ \text{d) } (1 + 2i)^4 & \text{e) } (z - i)^6 - (z + i)^6 & \end{array}$$

Exercice 12

Soit $z = x + iy$.

- a) Déterminer les conditions sur les réels x et y pour que $\frac{1}{z} = \bar{z}$.
b) À quel objet géométrique cette équation cartésienne vous fait-elle penser ?
c) Donner quelques exemples de couples (x, y) vérifiant la condition demandée.

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\bar{z} = z^2$.

Exercice 14

Déterminer les entiers naturels n pour lesquels le nombre complexe $(1 + i)^n$ est réel (penser aux propriétés de la conjugaison).

Exercice 15

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que

$$z - \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}^*.$$