# Exercices – Nombres complexes : point de vue géométrique

Terminale, option mathématiques expertes

Dans tous les exercices, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

**Exercice 1** *(Affixes de points et de vecteurs)*

On considère les points $A(2+3\mathrm{i})$, $B(-1+\mathrm{i})$ et $C(4-2\mathrm{i})$.

1. Placer $A$, $B$, $C$ dans le plan complexe.
2. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer l'affixe du milieu $I$ de $[BC]$.
4. Déterminer l'affixe du point $D$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
5. Déterminer les affixes des points $A'$, $B'$, $C'$ symétriques respectifs de $A$, $B$, $C$ par rapport à l'axe des abscisses. Quelle relation lie l'affixe de $A'$ à celle de $A$ ?

**Exercice 2** *(Calculs de modules)*

1. Soit $z = 3+4\mathrm{i}$. Calculer $|z|$, $|\overline{z}|$, $|-z|$, $|z^2|$, $\left|\dfrac{1}{z}\right|$ et $|z^5|$.
2. Calculer le module de chacun des nombres suivants, sans développer :
$$z_1 = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}, \qquad z_2 = (2+\mathrm{i})(3-4\mathrm{i}), \qquad z_3 = (1+\mathrm{i})^8, \qquad z_4 = \frac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}.$$
3. Écrire $\dfrac{1}{3-4\mathrm{i}}$ sous forme algébrique en utilisant la relation $|z|^2 = z\overline{z}$.

**Exercice 3** *(Identité du parallélogramme)*

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes.

1. Montrer que $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)$.
2. En déduire que $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2+|z'|^2\right)$.
3. Interpréter géométriquement ce résultat dans le cas où $O$, $M(z)$, $N(z')$ et $P(z+z')$ forment un parallélogramme.

**Exercice 4** *(Ensembles de points)*

Pour chaque question, déterminer et représenter l'ensemble des points $M(z)$ du plan vérifiant la condition donnée.

1. $|z-2+\mathrm{i}|=3$.
2. $|z-1|=|z+\mathrm{i}|$.
3. $|z-\mathrm{i}|\leqslant 2$.
4. $|z-1+\mathrm{i}|>1$.
5. Écrire à l'aide d'un module la condition : « $M$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ », où $A(1+\mathrm{i})$ et $B(-2)$.

**Exercice 5** *(Nature d'un triangle)*

1. On considère les points $A(-1)$, $B(1)$ et $C(\mathrm{i}\sqrt{3})$. Montrer que le triangle $ABC$ est équilatéral.
2. On considère les points $A(1+\mathrm{i})$, $B(3+2\mathrm{i})$ et $C(3\mathrm{i})$. Calculer $AB$, $AC$ et $BC$ ; en déduire la nature du triangle $ABC$.

**Exercice 6** *(L'ensemble $\mathbb{U}$)*

1. Montrer que $\dfrac{3+4\mathrm{i}}{5}$ et $\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ appartiennent à $\mathbb{U}$.
2. Soit $z\in\mathbb{U}$. Montrer que $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$, puis que $z^n\in\mathbb{U}$ pour tout entier naturel $n$.
3. Soit $z\in\mathbb{U}$ avec $z\neq -1$. On pose $w=\dfrac{z-1}{z+1}$.
   (a) Exprimer $\overline{w}$ en fonction de $z$, en utilisant $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$.
   (b) En déduire que $\overline{w}=-w$, puis que $w$ est un imaginaire pur (éventuellement nul).

**Exercice 7** *(Module et argument)*

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i},\qquad z_2=-1-\mathrm{i}\sqrt{3},\qquad z_3=2-2\mathrm{i},\qquad z_4=-5\mathrm{i},\qquad z_5=-3.$$

Placer les points correspondants sur un schéma et vérifier la cohérence des résultats.

**Exercice 8** *(Formes algébrique et trigonométrique)*

1. Écrire sous forme algébrique :

$$a=6\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right),\quad b=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),\quad c=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}.$$

2. Écrire sous forme trigonométrique :

$$d=-4,\qquad e=3\mathrm{i},\qquad f=1+\mathrm{i}\sqrt{3},\qquad g=-3\left(\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right).$$

3. Soit $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r>0$. Donner, en fonction de $r$ et $\theta$, la forme trigonométrique de $\overline{z}$ et de $-z$.

**Exercice 9** *(Une suite complexe)*

On considère la suite $(z_n)$ définie par $z_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$, $z_{n+1} = \dfrac{\mathrm{i}}{2}z_n + \dfrac{5}{2}$. On note $M_n$ le point d'affixe $z_n$.

1. Déterminer le nombre complexe $\omega$ tel que $\omega = \dfrac{\mathrm{i}}{2}\omega + \dfrac{5}{2}$ et placer le point $\Omega(\omega)$.
2. On pose $w_n = z_n - \omega$. Montrer que $(w_n)$ est géométrique et exprimer $w_n$ en fonction de $n$.
3. En déduire $\Omega M_n$ en fonction de $n$, puis la limite de $\Omega M_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$. Que peut-on dire de la position des points $M_n$ ?
4. Calculer $z_1$, $z_2$ et placer $M_0$, $M_1$, $M_2$ sur une figure.

**Exercice 10** *(Une suite de module constant)*

On considère la suite $(z_n)$ définie par $z_0 = 2 + \mathrm{i}$ et $z_{n+1} = \mathrm{i}z_n + 1 + \mathrm{i}$.

1. Montrer que le point $\Omega(\mathrm{i})$ vérifie $\mathrm{i} = \mathrm{i} \times \mathrm{i} + 1 + \mathrm{i}$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n - \mathrm{i} = 2\,\mathrm{i}^n$.
3. En déduire que tous les points $M_n(z_n)$ appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. Calculer $z_0$, $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$. Que remarque-t-on ?

**Exercice 11** *(Inégalité triangulaire)*

1. Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes tels que $|z| = 3$ et $|z'| = 2$. Montrer que $1 \leqslant |z+z'| \leqslant 5$. On pourra utiliser l'inégalité triangulaire sous la forme $|z| = |(z + z') - z'|$.
2. Les bornes 1 et 5 sont-elles atteintes ? Donner, le cas échéant, des exemples de nombres $z$ et $z'$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 2$. Montrer que $1 \leqslant |z - 1| \leqslant 3$, puis interpréter géométriquement ce résultat à l'aide du point $A(1)$ et du cercle de centre $O$ et de rayon 2.
4. Montrer que, pour tous complexes $z$ et $z'$, $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'|$.

**Exercice 12** *(Pour aller plus loin : suites de type Mandelbrot)*

Pour $c \in \mathbb{C}$, on considère la suite définie par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$.

1. Calculer les premiers termes pour $c = -1$, puis pour $c = 1$. Dans quel cas la suite $(|z_n|)$ semble-t-elle bornée ?
2. Pour $c = \mathrm{i}$, calculer $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$, $z_5$. Que remarque-t-on ?
3. On admet que si $|c| \leqslant 2$ et s'il existe un rang $n$ tel que $|z_n| > 2$, alors la suite $(|z_n|)$ tend vers $+\infty$. Écrire en Python une fonction `reste_borne(c, N)` qui renvoie `True` si $|z_n| \leqslant 2$ pour tout $n \leqslant N$ et `False` sinon (Python note `1j` le nombre complexe i et `abs(z)` le module de `z`).
4. Tester la fonction pour $c = -1$, $c = 1$, $c = \mathrm{i}$ et $c = -0{,}75 + 0{,}1\mathrm{i}$.