Exercices – PGCD de deux entiers, algorithme d'Euclide

Terminale – Option Mathématiques expertes

Exercice 1 *Diviseurs d'un entier*

1. Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 60, puis de 126.
2. En déduire les diviseurs communs positifs à 60 et 126, puis PGCD$(60, 126)$.
3. Déterminer les diviseurs positifs de 97. Que remarque-t-on ? (On pourra se limiter aux entiers d tels que $d \leq \sqrt{97}$.)

Exercice 2 *PGCD par la liste des diviseurs*

Déterminer, en listant les diviseurs, les PGCD suivants :

a) PGCD$(48, 180)$ b) PGCD$(35, 64)$ c) PGCD$(144, 24)$

Parmi ces couples, lesquels sont formés d'entiers premiers entre eux ?

Exercice 3 *Quelques propriétés*

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Répondre par vrai ou faux en justifiant.

a) Si a divise b, alors PGCD$(a, b) = a$.
b) Si a et b sont premiers, alors PGCD$(a, b) = 1$.
c) Si PGCD$(a, b) = 1$, alors a et b sont premiers.
d) PGCD$(a, b) =$ PGCD$(a, a + b)$? (On pourra utiliser le lemme d'Euclide.)

Exercice 4 *Algorithme d'Euclide*

Calculer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

a) PGCD$(391, 221)$ b) PGCD$(1989, 867)$ c) PGCD$(5280, 3234)$

Exercice 5 *Fractions irréductibles*

1. À l'aide de l'exercice précédent, écrire sous forme de fractions irréductibles
$$\frac{391}{221} \qquad \frac{1989}{867} \qquad \frac{5280}{3234}.$$
2. Les deux entiers obtenus au numérateur et au dénominateur sont-ils premiers entre eux ? Justifier.

Exercice 6 *Avec un paramètre*

Soit n un entier naturel non nul. Déterminer, à l'aide du lemme d'Euclide :

1. PGCD$(n + 1, n)$;
2. PGCD$(2n + 1, n)$;
3. PGCD$(3n + 2, n)$, en discutant selon la parité de n.

Exercice 7 *Algorithmique*

On considère la fonction Python suivante.

```
def pgcd(a, b):
    while b != 0:
        a, b = b, a % b
    return a
```

1. Recopier et compléter le tableau donnant les valeurs successives de `a` et `b` lors de l'appel `pgcd(252, 198)`.

`a`	252				
`b`	198				

2. Que renvoie `pgcd(0, 5)` ? Que renvoie `pgcd(7, 21)` ?
3. Expliquer pourquoi la boucle `while` se termine toujours lorsque `a` et `b` sont des entiers naturels.

Exercice 8 *Utiliser* $\text{PGCD}(ka, kb) = k\ \text{PGCD}(a, b)$

1. Sachant que $\text{PGCD}(84, 36) = 12$, déterminer $\text{PGCD}(840, 360)$ et $\text{PGCD}(8400, 3600)$.
2. Déterminer $\text{PGCD}(216, 126)$, puis en déduire $\text{PGCD}(2160, 1260)$.

Exercice 9 *Carrelage*

Une pièce rectangulaire mesure 7,56 m de long et 4,20 m de large. On souhaite la recouvrir entièrement de carreaux carrés, tous identiques, sans découpe, en choisissant des carreaux de côté le plus grand possible (un nombre entier de centimètres).

1. Quelle est la longueur du côté d'un carreau ?
2. Combien de carreaux faut-il ?

Exercice 10 *Distribution*

Un confiseur dispose de 252 bonbons et de 198 chocolats. Il souhaite réaliser des paquets identiques, contenant chacun le même nombre de bonbons et le même nombre de chocolats, de façon à utiliser toute sa marchandise.

1. Quel est le nombre maximal de paquets qu'il peut réaliser ?
2. Quelle est alors la composition de chaque paquet ?

Exercice 11 *Pour aller plus loin*

Soient a et b deux entiers naturels avec $a \geq b > 0$.

1. Montrer que $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a - b, b)$.
2. Soit d un diviseur commun à a et b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, montrer que d divise $\text{PGCD}(a, b)$.
3. Déduire de la question précédente que les diviseurs communs à a et b sont exactement les diviseurs de $\text{PGCD}(a, b)$.
4. Application : déterminer les diviseurs communs à 252 et 198.