

Exercices divisibilité, division euclidienne

Bruno REDON

September 2026

Exercice 1 — Diviseurs et multiples

1. Déterminer l'ensemble A des diviseurs positifs de 60.
2. En déduire l'ensemble B des diviseurs relatifs de 60.
3. Déterminer l'ensemble C de tous les entiers relatifs n tels que $n \mid 60$ et $|n| > 5$.

Exercice 2 — Utiliser la définition

Dans chacun des cas suivants, dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

- | | | |
|------------------|--------------------|------------------|
| a) $7 \mid 84$. | c) $-6 \mid 42$. | e) $0 \mid 0$. |
| b) $8 \mid 54$. | d) $12 \mid -84$. | f) $0 \mid 15$. |

Exercice 3 — Vrai ou faux ?

Pour chacune des affirmations suivantes, quels que soient les entiers relatifs a, b, c , dire si elle est vraie ou fausse. Lorsqu'elle est fausse, donner un contre-exemple.

- a) Si $a \mid b$, alors $b \mid a$.
- b) Si $a \mid b$, alors $a \mid -b$.
- c) Si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors $a \mid (b + c)$.
- d) Si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors $a \mid (b - c)$.
- e) Si $a \mid b$, alors $a \mid bc$ pour tout $c \in \mathbb{Z}$.
- f) Si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$.

Exercice 4 — Combinaisons linéaires

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a \mid b$ et $a \mid c$.

1. Montrer que $a \mid (3b + 5c)$.
2. Montrer que $a \mid (7b - 2c)$.
3. Montrer que $a \mid (ub + vc)$ pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5 — Démonstrations de divisibilité

Démontrer les propriétés suivantes.

1. Pour tout entier n , $3 \mid n(n+1)(n+2)$.
2. Pour tout entier n , $2 \mid n(n+1)$.
3. Pour tout entier n , $6 \mid n(n+1)(n+2)$.

Exercice 6 — Critères de divisibilité

Sans effectuer les divisions, déterminer parmi les nombres suivants ceux qui sont divisibles par 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 et 10.

120, 135, 216, 360, 504, 725, 936, 1080, 1232, 2475.

Exercice 7 — Chiffres inconnus

Déterminer tous les chiffres x permettant de compléter les nombres suivants afin qu'ils soient divisibles par le nombre indiqué.

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| a) $37x$ est divisible par 3. | d) $72x$ est divisible par 8. |
| b) $52x$ est divisible par 4. | e) $91x5$ est divisible par 9. |
| c) $4x8$ est divisible par 6. | f) $48x0$ est divisible par 10. |

Exercice 8 — Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes. Donner à chaque fois le quotient q et le reste r .

- | | | |
|-------------------|-----------------------|-------------------|
| a) 157 par 12. | c) 157 par -12 . | e) 238 par 15. |
| b) -157 par 12. | d) -157 par -12 . | f) -238 par 15. |

Vérifier dans chaque cas que:

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < |b|.$$

Exercice 9 — Retrouver le quotient et le reste

On considère la division euclidienne d'un entier a par 17.

1. On sait que $a = 17 \times (-8) + 11$. Déterminer le quotient et le reste.
2. On sait que $a = 17 \times 12 - 5$. Cette écriture correspond-elle à une division euclidienne ? Si ce n'est pas le cas, donner l'écriture correcte.
3. On sait que $a = -17 \times 9 + 4$. Déterminer le quotient et le reste.

Exercice 10 — Une propriété utile

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a \mid b$.

1. Montrer que $a \mid (b + c)$ si et seulement si $a \mid c$.
2. Montrer que si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors

$$a \mid (b + c) \quad \text{et} \quad a \mid (b - c).$$

3. On sait que $7 \mid 91$ et que $7 \mid 42$. Sans effectuer de division, déterminer si 7 divise les nombres suivants :

$$91 + 42, \quad 91 - 42, \quad 3 \times 91 - 5 \times 42.$$

Exercice 11 — Récurrence

Montrer que, quels que soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a - b \mid a^n - b^n.$$

Exercice 12 - Équation et divisibilité

Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels

$$n - 2 \mid n^2 - 5n + 11.$$

Exercice 13 - Équivalence

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que le nombre $2n + 3$ est divisible par 11 si, et seulement si, le nombre $5n + 2$ l'est.

Exercice 14 - Récurrence

- a) Montrer que $n^7 - n$ est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$6 \mid n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n.$$