

Le triangle de PASCAL



Blaise Pascal
(1623 - 1662)

1. Définition de la factorielle

Pour tout entier naturel $n > 0$,

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

Par convention,

$$0! = 1.$$

Exemples :

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

2. Les coefficients binomiaux

Pour tout entier naturel n et tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

Le coefficient $\binom{n}{k}$ se lit « k **parmi** n ».

Il est possible de rencontrer dans certains ouvrages l'ancienne notation C_n^k .

3. Le triangle de Pascal

On range les coefficients binomiaux dans un tableau où la ligne correspond à n et la colonne à k .

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
...	1	...	...	...	...	1	

Ou bien avec un triangle isocèle pour faire apparaître les symétries.

				1					
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1
1		1		5		10		10	
	1		5		10		10		5
		1		10		10		5	
			1		10		10		1
				1		10		10	
					1		10		
						1		10	
							1		10
								1	
									1

4. Propriétés

Les nombres situés sur les "bords" du triangle valent toujours 1. En effet $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Chaque nombre intérieur est obtenu en additionnant les deux nombres situés juste au-dessus et juste au-dessus à gauche pour le triangle rectangle (juste au-dessus à gauche et à droite pour le triangle isocèle).

Autrement dit,

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

Exemples :

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 6 = 3 + 3, \quad \binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10.$$

On a aussi (symétrie) :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

Exemple : $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$

5. Lien avec le dénombrement

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ représente le **nombre de façons de choisir k éléments parmi n** , sans tenir compte de l'ordre.

Exemple 1 :

Parmi les trois lettres $\{A, B, C\}$, combien peut-on choisir de couples ?

Les possibilités sont :

$$\{A, B\}, \quad \{A, C\}, \quad \{B, C\}.$$

Il y en a donc $\binom{3}{2} = 3$.

Exemple 2 :

Parmi les quatre lettres $\{A, B, C, D\}$, combien peut-on choisir de groupes de trois ?

Les possibilités sont :

$$\{A, B, C\}, \quad \{A, B, D\}, \quad \{A, C, D\}, \quad \{B, C, D\}.$$

Il y en a donc $\binom{4}{3} = 4$.

À retenir :

- $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ et $0! = 1$.
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Les coefficients binomiaux sont disposés dans le triangle de Pascal, ce qui permet de retrouver leurs propriétés.
- $\binom{n}{k}$ compte le nombre de choix de k éléments parmi n .