Interrogation : Congruences et division euclidienne

Durée : 40 minutes Barème : 20 points **Corrigé**

Exercice 1 (4 points)

Effectue la division euclidienne de :

1. -251 par 16 ;
2. 2027 par -13.

Donne pour chaque cas le quotient et le reste.

1. $-251 = 16 \times (-16) + 5$ avec $0 \leq 5 < 16$: quotient -16, reste 5.
2. $2027 = (-13) \times (-155) + 12$ avec $0 \leq 12 < 13$: quotient -155, reste 12.

Exercice 2 (4 points)

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $8^n - 3^n$ est divisible par 5.

Soit $P(n)$ la propriété : « $8^n - 3^n$ est divisible par 5 ».
Initialisation. Pour $n = 0$: $8^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0$, qui est divisible par 5. $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $8^n - 3^n = 5k$. Alors

$$8^{n+1} - 3^{n+1} = 8 \times 8^n - 3 \times 3^n = 8\,(8^n - 3^n) + 5 \times 3^n = 40k + 5 \times 3^n = 5\,(8k + 3^n).$$

Comme $8k + 3^n$ est un entier, $8^{n+1} - 3^{n+1}$ est divisible par 5 : $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 3 (4 points)

Pour chacune des valeurs suivantes de a, trouver un entier relatif b compris entre -4 et 4 tel que $a \equiv b\ [9]$.

$$a = 18 \qquad a = 47 \qquad a = 111 \qquad a = 2345$$

$18 = 9 \times 2 + 0$ donc $b = 0$. $47 = 9 \times 5 + 2$ donc $b = 2$. $111 = 9 \times 12 + 3$ donc $b = 3$. $2345 = 9 \times 260 + 5$ et $5 \equiv -4\ [9]$ donc $b = -4$.

Exercice 4 (4 points)

Trouver un entier n tel que $n \equiv 3\ [7]$ et $n \equiv 2\ [9]$.

$n \equiv 2\ [9]$ donc $n = 2 + 9k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors $2 + 9k \equiv 3\ [7]$, soit $2k \equiv 1\ [7]$ (car $9 \equiv 2$). Comme $2 \times 4 = 8 \equiv 1\ [7]$, on obtient $k \equiv 4\ [7]$: $k = 4$ convient, d'où $n = 38$. Vérification : $38 = 7 \times 5 + 3 = 9 \times 4 + 2$. (Les solutions sont les $38 + 63m$.)

Exercice 5 (4 points)

Détermine le reste de la division euclidienne de 2^{100} par 9.

$2^6 = 64 = 7 \times 9 + 1$ donc $2^6 \equiv 1\ [9]$. $100 = 6 \times 16 + 4$, d'où $2^{100} = (2^6)^{16} \times 2^4 \equiv 2^4 = 16 \equiv 7\ [9]$. Le reste est 7.