

Introduction aux nombres complexes

Activité (Mathématiciens sans complexes). Au XVI^e siècle, le problème de la résolution des équations du troisième degré passionna bon nombre de mathématiciens italiens. Jérôme Cardan généralisa une méthode proposée par Tartaglia pour résoudre certaines de ces équations. Pour l'équation

$$x^3 + px = q$$

il proposa la solution suivante :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

si $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$.

Cette formule est depuis lors appelée *formule de Cardan*.

Question préliminaire.

- a) Quels sont les mathématiciens « célèbres » répertoriés dans ce texte ?
 - b) À quoi vous fait penser la formule $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$? À votre avis, quel est son rôle ?
 - c) Il y a quelque chose d'étrange, voire choquant, à un moment donné dans ce texte. Quelle est cette chose ? Quel est son rôle ? Par quelle notation l'a-t-on remplacé ? Pourquoi ?
1. Soit l'équation $x^3 - 3x = 2$. Quelles sont les valeurs de p et q ? Trouver une solution.
 2. Considérons à présent l'équation $x^3 - 15x = 4$. Peut-on appliquer la formule de Cardan ? Quelle *formule* obtient-on si on décide tout de même de l'appliquer ?
 3. Le peu scrupuleux Jérôme Cardan, bientôt suivi par Raphaël Bombelli, introduisit un **nombre imaginaire dont le carré vaut -1** et le nota $\sqrt{-1}$. En admettant comme eux que $(\sqrt{-1})^2 = -1$ et en utilisant les règles habituelles d'addition et de multiplication, montrer que
$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}.$$
 4. En déduire que la *formule* de Cardan trouvée à la question 2) produit $x = 4$ comme solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$. Vérifier que $x = 4$ est bien une solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$.

En fait, la notation $\sqrt{-1}$ peut engendrer des confusions, puisque d'après nos règles usuelles de calcul on devrait alors avoir

$$-1 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = 1 !$$

Plus tard, Leonard Euler sauva la situation en remplaçant $\sqrt{-1}$ par la notation : i , comme "imaginaire". Attention, dorénavant la notation $\sqrt{-1}$ est interdite...

Les premiers nombres complexes furent donc introduits dans le but de résoudre des équations. Par exemple nous venons, grâce à eux, de trouver une solution réelle à l'équation $x^3 - 15x = 4$. Mais leur utilisation permet également de résoudre des équations qui n'ont pas de solutions réelles, dans un espace de nombres "plus grand". Ainsi, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions réelles mais elle a deux solutions complexes : $+i$ et $-i$.