

Nombres complexes

Point de vue algébrique

1 Introduction et définition de $\mathbb{C}$

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. En effet, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 1 > 0$.

Définition

On appelle **ensemble des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, un ensemble contenant $\mathbb{R}$, muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$, contenant un nombre i (comme imaginaire) tel que $i^2 = -1$, et tel que tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrive de façon **unique** sous la forme

$$z = a + ib, \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$$

Cette écriture est appelée **forme algébrique** (ou écriture algébrique) de z .

- a est appelé la **partie réelle** de z , notée $\operatorname{Re}(z)$;
- b est appelé la **partie imaginaire** de z , notée $\operatorname{Im}(z)$.

- Si $b = 0$, alors $z = a \in \mathbb{R}$: z est un réel. Ainsi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Si $a = 0$, alors $z = ib$: on dit que z est un **imaginaire pur**. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Ainsi 0 est à la fois réel et imaginaire pur.

Exemple

si $z = -2 + i$ alors $\operatorname{Re}(z) = -2$ et $\operatorname{Im}(z) = 1$

Propriété (unicité de la forme algébrique)

Soient a, a', b, b' des réels. Pour $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$:

$$z = z' \iff a = a' \text{ et } b = b'.$$

En particulier :

$$a + ib = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0.$$

Cette propriété fondamentale, appelée **principe d'identification**, permet de résoudre des équations en identifiant partie réelle et partie imaginaire de part et d'autre d'une égalité.

Exemple

Déterminer les réels x et y tels que $(2x - 1) + i(3y + 2) = 5 - 4i$.

Par identification : $2x - 1 = 5$ et $3y + 2 = -4$, soit $x = 3$ et $y = -2$.

2 Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$).

Définition (multiplication)

En développant le produit et en utilisant $i^2 = -1$:

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + ia'b + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

Définition (addition et soustraction)

$$z + z' = (a + a') + i(b + b').$$

Exemple

Pour $z = 2 + 3i$ et $z' = 1 - i$:

$$z + z' = 3 + 2i, \quad zz' = (2 \times 1 - 3 \times (-1)) + i(2 \times (-1) + 1 \times 3) = 5 + i.$$

Propriétés algébriques

$(\mathbb{C}, +, \times)$ possède les mêmes règles de calcul que $(\mathbb{R}, +, \times)$: pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$,

- **Commutativité** : $z + z' = z' + z$ et $zz' = z'z$;
- **Associativité** : $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ et $(zz')z'' = z(z'z'')$;
- **Distributivité** : $z(z' + z'') = zz' + zz''$;
- **Éléments neutres** : 0 pour +, 1 pour $\times$.

On dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un **corps** (commutatif).

Méthode

Pour calculer une puissance de i , on utilise $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, et la périodicité de période 4 : $i^n = i^{n \bmod 4}$.

3 Conjugaison

Définition

Soit $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z , noté $\bar{z}$, le nombre complexe

$$\bar{z} = a - ib.$$

Propriétés immédiates

Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$:

- $\bar{\bar{z}} = z$ (involution) ;
- $z + \bar{z} = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$, donc $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$;
- $z - \bar{z} = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z)$, donc $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
- $z\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+$;
- $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$; z imaginaire pur $\iff \bar{z} = -z$.

Théorème (conjugué d'une somme, d'un produit)

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \quad \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}'.$$

Démonstration. Posons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$.

Somme. $z + z' = (a + a') + i(b + b')$, donc

$$\overline{z + z'} = (a + a') - i(b + b') = (a - ib) + (a' - ib') = \bar{z} + \bar{z}'.$$

Produit. $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$, donc

$$\overline{zz'} = (aa' - bb') - i(ab' + a'b).$$

D'autre part,

$$\bar{z} \bar{z}' = (a - ib)(a' - ib') = aa' - iab' - ia'b + i^2 bb' = (aa' - bb') - i(ab' + a'b).$$

On obtient bien $\overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}'$. ■

Théorème (conjugué d'un inverse et d'un quotient)

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}, \quad \text{et pour } z' \in \mathbb{C}^*, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Par définition de l'inverse, $z \times \frac{1}{z} = 1$. En conjuguant cette égalité et en utilisant $\overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}'$ (théorème précédent) :

$$\bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \bar{1} = 1.$$

Comme $\bar{z} \neq 0$ (car $z \neq 0$), on en déduit, par unicité de l'inverse de $\bar{z}$:

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Pour le quotient, on écrit $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ et on applique les deux résultats précédents (conjugué d'un produit puis d'un inverse) :

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z}'} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}.$$

Théorème (conjugué d'une puissance entière)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n .

Initialisation. Pour $n = 0$: $\overline{z^0} = \bar{1} = 1 = \bar{z}^0$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons que pour un entier $n \geq 0$, on ait $\overline{z^n} = \bar{z}^n$. Alors, en utilisant le théorème du conjugué d'un produit :

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \bar{z} = \bar{z}^n \times \bar{z} = \bar{z}^{n+1}.$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$. Le résultat s'étend à $n \in \mathbb{Z}$ en combinant avec le conjugué d'un inverse (pour $z \neq 0$). ■

4 Module et inverse d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$). On appelle **module** de z , noté $|z|$, le réel positif

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Le module généralise la valeur absolue : si $z \in \mathbb{R}$, $|z|$ coïncide avec la valeur absolue de z . On remarque que $z\bar{z} = |z|^2$ est un réel positif, et $z\bar{z} = 0 \iff z = 0$.

Propriété (inverse d'un complexe non nul)

Tout $z \in \mathbb{C}^*$ possède un unique inverse, noté $\frac{1}{z}$, donné par

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Justification. Comme $z \neq 0$, on a $|z|^2 = z\bar{z} \neq 0$, ce qui autorise à écrire

$$z \times \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1,$$

donc $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ est bien l'inverse de z . ■

Méthode

Pour mettre un quotient $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué $\bar{z}'$ du dénominateur, afin de faire apparaître au dénominateur $z'\bar{z}' = |z'|^2$ qui est bien un réel différent de 0.

Exemple

$$\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{4+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i.$$

5 Résolution d'équations

5.1 Équation linéaire $az = b$

Propriété

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. L'équation $az = b$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, admet une unique solution :

$$z = \frac{b}{a}.$$

Exemple

Résoudre $(1+i)z = 3-i$.

$$z = \frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i-i+i^2}{1+1} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i.$$

5.2 Équations faisant intervenir z et $\bar{z}$

Méthode 1 (identification, en posant $z = x + iy$)

Pour résoudre une équation où apparaissent à la fois z et $\bar{z}$, on pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on développe, puis on identifie partie réelle et partie imaginaire (principe d'identification) pour se ramener à un système de deux équations réelles à deux inconnues x et y .

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z + 2\bar{z} = 3 + 6i$.

On pose $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $\bar{z} = x - iy$, et l'équation devient :

$$(x + iy) + 2(x - iy) = 3 + 6i \iff 3x - iy = 3 + 6i.$$

Par identification : $3x = 3$ et $-y = 6$, soit $x = 1$ et $y = -6$.

La solution est donc $z = 1 - 6i$.

Méthode 2 (système en z et $\bar{z}$, par conjugaison)

On conjugue l'équation initiale : on obtient une seconde équation, où z et $\bar{z}$ ont échangé leurs rôles. On considère alors z et $\bar{z}$ comme les deux inconnues d'un **système linéaire**, que l'on résout par combinaison linéaire (comme un système classique à deux inconnues) pour isoler z – la valeur de $\bar{z}$ n'ayant pas besoin d'être calculée séparément, ni même d'être cohérente en tant que conjugué : elle joue simplement le rôle de seconde inconnue auxiliaire du système.

Exemple

Reprenons $z + 2\bar{z} = 3 + 6i$. En conjuguant cette égalité, et en utilisant $\overline{z + 2\bar{z}} = \bar{z} + 2z$ (conjugué d'une somme et d'un produit) ainsi que $\overline{3 + 6i} = 3 - 6i$, on obtient le système :

$$\begin{cases} z + 2\bar{z} = 3 + 6i & (1) \\ 2z + \bar{z} = 3 - 6i & (2) \end{cases}$$

On élimine $\bar{z}$ par combinaison linéaire : $2 \times (2) - (1)$ donne

$$4z + 2\bar{z} - (z + 2\bar{z}) = 2(3 - 6i) - (3 + 6i) \iff 3z = 3 - 18i,$$

d'où $z = 1 - 6i$, ce qui confirme le résultat obtenu par la méthode 1.

6 Formule du binôme dans $\mathbb{C}$

Théorème (formule du binôme de Newton)

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \text{où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n .

Initialisation. Pour $n = 1$: $\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} b + \binom{1}{1} a = a + b$. La formule est vraie au rang 1.

Hérédité. Supposons la formule vraie à un rang $n \geq 1$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Alors :

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}.$$

Dans la première somme, on effectue le changement d'indice $j = k + 1$ (donc j varie de 1 à $n + 1$) :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j}.$$

En regroupant avec la seconde somme (indice k de 0 à n), et en isolant les termes extrêmes $j = n + 1$ et $k = 0$:

$$(a + b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}.$$

Or, d'après la **formule de Pascal**, $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. De plus $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$, ce qui permet d'inclure les termes extrêmes dans la somme :

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

La formule est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, la formule du binôme est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (et par convention pour $n = 0$). ■

Exemple

Pour $n = 3$: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, valable pour $a, b \in \mathbb{C}$, en particulier pour $a = z$ et $b = i$:

$$(z + i)^3 = z^3 + 3iz^2 - 3z - i.$$